

# CONSIDERAÇÕES FUNDAMENTAIS PARA O CÁLCULO DOS MOTORES ASSINCRONOS

## PRIMEIRA PARTE

### O FENÓMENO DA SATURAÇÃO NO CÁLCULO DA CORRENTE E DO BINÁRIO DE ARRANQUE DOS MOTORES DE DUPLA GAIOLA

HUBERT FESCH

*Engenheiro Electrotécnico (I.S.T.)*

DA SECÇÃO DE ESTUDOS DA EMPRESA FABRIL DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS

#### INTRODUÇÃO

1. — Quando nos foi pedido, pela primeira vez, o cálculo dum motor de gaiola, convencemo-nos de que o bom desempenho seria realizado através de toda a literatura clássica que tínhamos ao nosso dispor.

Assim aconteceu no que diz respeito às características nominais.

Quanto às de arranque, porém, obtivemos resultados deploráveis, em confronto com os ensaios, quer nos motores de dupla gaiola, quer nos de simples. Tornou-se-nos então claro que as reactâncias de dispersão variavam muito sensivelmente, no seu valor intrínseco, com o estado de saturação no ferro.

Vamos, em primeiro lugar, esclarecer o que se segue, para o motor de dupla gaiola:

Em alguns trabalhos leva-se a perfeição, à parte o problema que nos ocupa, ao ponto de se considerar o diagrama do motor de dupla gaiola representado por três círculos em vez dos dois clássicos. Chega-se a esta conclusão, rapidamente, a partir da equação geral da corrente absorvida. Consideram-se três categorias de escorregamentos: Pequenos, médios e grandes. Isto permite obter três equações diferentes, para a corrente absorvida, cada uma das quais é válida para a zona respectiva dos escorregamentos. Vê-se assim, claramente, o valor da reactância de dispersão conjunta diminuir, à medida que o escorregamento aumenta, pelo papel progressivamente menor que a gaiola interior vai desempenhando.

No entanto esta análise, já bastante apurada, não satisfaz ainda, pois que as permeâncias de fugas são calculadas para definirem, com suficiente rigor, as características nominais, através da equação válida para a zona dos pequenos escorregamentos e recorre-se a estas mesmas permeâncias para a obtenção das características de arranque, por intermédio da equação adequada para este regime.

Ora justamente as permeâncias de fugas não são constantes com a carga. Se não se tomar em conta este fenómeno, que a análise clássica despreza, cometem-se erros graves, por defeito, na avaliação da corrente e do binário de arranque.

É evidente que este fenómeno não é exclusivo dos motores de gaiola, mas, por razões imediatas, não interessa conhecer, com este rigor todo, as condições de arranque nos motores de rotor bobinado, visto que estas são modificadas pelas resistências exteriores. No entanto, a diminuição das reactâncias de dispersão, com o aumento da corrente, já influi sensivelmente no cálculo do binário de valor máximo dos motores de anéis. Para a resolução deste problema apresentaremos posteriormente um outro trabalho.

2. — O artigo presente pretende precisamente resolver o problema exposto. No capítulo primeiro, relacionam-se as reactâncias em regime não saturado com as de arranque, o que permite, admitindo como certo o aspecto formal da equação já mencionada da corrente absorvida em caso de arranque, obter uma expressão, para a corrente neste regime,

que é função dos valores das reactâncias em regime não saturado.

3. — No capítulo segundo, indicativo de um cálculo rápido, mostra-se que a corrente de arranque se pode obter, embora eventualmente com menos rigor, directamente sem o conhecimento destes valores, à excepção da reactância da gaiola interior da qual depende a componente óhmica da corrente.

Mostraremos que poderá ser definida simplesmente pela corrente magnetizante correspondente ao arranque, pelas resistências estatórica e rotórica conjunta e pela reactância da gaiola interior.

Porém, como veremos, este processo é tanto menos exacto quanto maior for a diferença entre os coeficientes de dispersão  $v_1$  e  $v_2$  do estator e do rotor, podendo conduzir a erros de 12%, para a corrente de arranque, quando estes coeficientes atingem o limite de divergência entre si, até agora apreciado em motores, evidentemente normais.

Pelo processo mencionado, que constitui o capítulo primeiro, o erro, proveniente do facto dos coeficientes de dispersão serem diferentes (sabemos que nos motores normais são sempre pouco divergentes), é muito menor, pois relacionam-se as reactâncias no arranque com as correspondentes ao regime não saturado (estas calculadas), por intermédio dum cociente de expressões que eventualmente encerram aproximadamente o mesmo erro, proveniente da divergência apontada dos coeficientes de dispersão estator-rotor.

Ainda no capítulo segundo, concluiremos a seguinte propriedade:

A corrente de arranque começa a afastar-se da corrente de curto-circuito extrapolada para uma tensão a partir da qual a corrente magnetizante perde a sua característica de proporcionalidade com a tensão.

Ninguém pode duvidar do interesse que estes problemas apresentam para uma empresa construtora, pois a sua solução correcta permite construir motores com as características de arranque pretendidas evitando, como sucede frequentemente, por simples comparação com outros motores já construídos, surpresas seguidas dos inevitáveis prejuízos.

4. — Vamos apresentar a equação geral da corrente absorvida por um motor de dupla gaiola sem a demonstrarmos, primeiro porque a demonstração se encontra em qualquer livro da especialidade e segundo porque não é o fito do trabalho presente:

$$\vec{I}_1 = \frac{\vec{V}_1}{\left[ R_s + \frac{r_a}{g} + \frac{I}{g} \left( \frac{r_2 r + g^2 x_2^2}{r^2 + g^2 x_2^2} \cdot r_1 \right) \right] + j \left[ X_s + x_a + \frac{r_1^2 x_2}{r^2 + g^2 x_2^2} \right]} \quad (a)$$

em que:

$R_s$  — resistência óhmica por fase do estator

$r_a$  — resistência do anel reduzida ao estator por fase

$r_1$  — resistência da gaiola exterior reduzida ao estator por fase

$r_2$  — resistência da gaiola interior reduzida ao estator por fase

$r = r_1 + r_2$

$X_s$  — reactância nominal do estator por fase

$x_a$  — reactância nominal da gaiola exterior reduzida ao estator por fase

$x_2$  — reactância nominal da gaiola interior reduzida por fase

$g$  — escorregamento

$V_1$  — tensão aplicada por fase.

5. — Por enquanto definimos apenas as reactâncias nominais porque pretendemos passar rapidamente em revista a teoria clássica que admite a invariabilidade do valor intrínseco das reactâncias com a carga.

Admitindo este princípio clássico, teremos imediatamente a corrente de arranque fazendo:

$g = I$ , na expressão (a):

$$\vec{I}_{cc} = \frac{\vec{V}_1}{\left( R_s + r_a + \frac{r_2 r + x_2^2}{r^2 + x_2^2} r_1 \right) + j \left( X_s + x_a + \frac{r_1^2 \cdot x_2}{r^2 + x_2^2} \right)} \quad (b)$$

Para a zona dos pequenos escorregamentos ( $g < 0,08$ ), a equação (a) converte-se, com um erro absolutamente desprezável em:

$$\vec{I}_1 = \frac{\vec{V}_1}{\left[ R_s + \frac{r_a}{g} + \frac{1}{g} \left( \frac{r_2 \cdot r_1}{r} \right) \right] + j \left[ X_s + x_a + \frac{r_1^2 x_2}{r^2} \right]} \quad (c)$$

Se fizermos nesta última equação (c),

$$g = 1$$

vamos obter uma corrente teórica, no sentido de não ter existência real, a que chamaremos: *corrente de curto-circuito teórica extrapolada*; teremos assim:

$$\vec{I}_{cct} = \frac{\vec{V}_1}{\left( R_s + r_a + \frac{r_2 \cdot r_1}{r} \right) + j \left( X_s + x_a + \frac{r_1^2 x_2}{r^2} \right)} \quad (d)$$

Como se vê, nestas quatro equações (a, b, c, d) os valores intrínsecos das reactâncias permanecem constantes, o que constitui o erro da análise clássica.

A equação (d) e a corrente magnetizante definem o círculo, chamado dos pequenos escorregamentos, único círculo de que nos serviremos, para a determinação das características nominais.

Seguir-se-ia, para completar a análise clássica, a determinação do centro do círculo dos grandes escorregamentos e ainda a determinação do centro dos escorregamentos médios que não apresentamos uma vez que não os utilizaremos.

Em resumo, o diagrama clássico apresentar-se-ia com o seguinte aspecto:

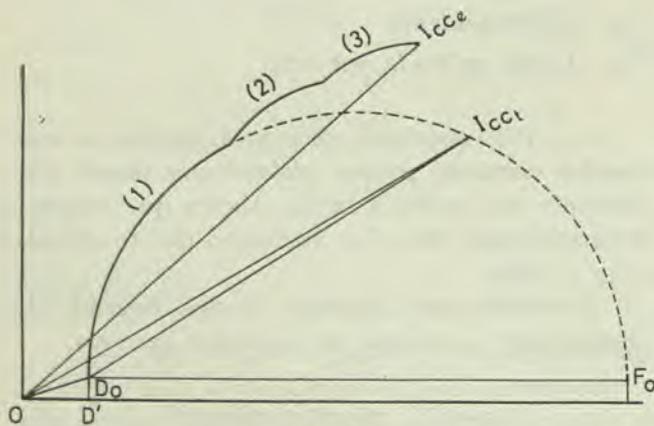


Fig. 1

$\overline{OI_{cc'i}}$  — corrente de curto-circuito teórica extrapolada

$\overline{OI_{cc'e}}$  — corrente de arranque, segundo a análise clássica. Para nós passará a chamar-se: Corrente de curto-circuito real extrapolada.

$\overline{D_0 I_{cc'i}}$  — Recta da potência útil válida até ao regime nominal. Em princípio não convém utilizá-la para além de 20% de sobrecarga, na média dos motores.

6. — Em resumo diremos que a análise clássica nos dá a verdadeira corrente de curto-circuito extrapolada, isto é, a corrente que se obtém extrapolando, para a tensão nominal, uma corrente próxima da nominal, obtida num ensaio de curto-circuito, evidentemente, sob tensão reduzida, desde que empreguemos valores das reactâncias correspondentes ao regime não saturado.

A verdadeira corrente de arranque a plena tensão será

$$I'_{cc} > I_{cc'e}$$

cuja determinação constitui o trabalho presente.

A análise clássica, admitindo a constância das reactâncias com a carga, admite que a corrente de

arranque é proporcional à tensão aplicada, o que, como se sabe, não é verdade:

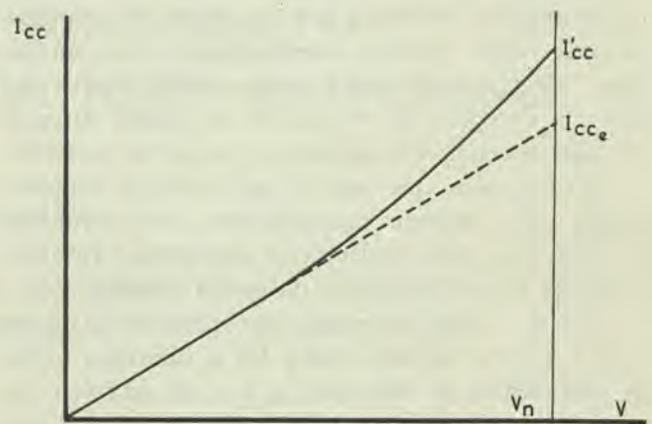


Fig. 2

Torna-se, portanto, claro, que se calcularmos as reactâncias de forma que se obtenham os seus valores correspondentes ao regime nominal, obteremos as características nominais do motor com suficiente rigor através da equação (d) que nos determina o círculo (I) dos pequenos escorregamentos. Utilizando a equação (b) se entrarmos com os valores das reactâncias correspondentes ao regime não saturado, obteremos unicamente a corrente de curto-circuito extrapolada, a não ser que saibamos os novos valores intrínsecos das reactâncias no regime de arranque.

Para resolver o nosso problema, teremos de saber achar o valor da verdadeira corrente de arranque  $I'_{cc}$  a partir da corrente facilmente calculável  $I_{cc'e}$ .

A título de curiosidade, diremos que são ainda as reactâncias em regime não saturado que se costumam empregar para definir as características nominais, contudo este método conduz-nos, como veremos mais adiante, a resultados um pouco pessimistas.

## CAPÍTULO I

### 1.1 — ESTABELECIMENTO DA RELAÇÃO ENTRE REACTANCIAS CONJUNTAS

#### A CARGAS DIFERENTES

1.1.1. — Escrevamos, para começar, as seguintes igualdades e definições:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{f}_{1L} \text{ — Fluxo ligado ao secundário considerado no} \\ \text{primário.} \\ l_{11} \text{ — Coeficiente correspondente a este fluxo.} \\ \dot{f}_{1L} = l_{11} \dot{I}_1 \end{array} \right.$$

$\vec{\phi}_{2L}$  - Fluxo ligado ao primário, sendo produzido pelo secundário, mas considerado no primário.

$L_M$  - Coeficiente de indução mútua dos dois enrolamentos.

$$\vec{\phi}_{2L} = L_M \vec{I}_2$$

$\vec{\phi}_{d1}$  - Fluxo de dispersão.

$\lambda_{11}$  - Coeficiente correspondente a este fluxo.

$$\vec{\phi}_{d1} = \lambda_{11} \vec{I}_1$$

$\vec{\phi}_t$  - Fluxo total.

$L_{11}$  - Coeficiente de auto indução do primário.

$$\vec{\phi}_t = L_{11} \vec{I}_1 = (1_{11} + \lambda_{11}) \vec{I}_1$$

$\vec{\phi}_{r1}$  - Fluxo resultante no primário para a carga  $I_1$

$v_1$  - Coeficiente de dispersão para a carga  $I_1$

Para as grandezas que se referem ao secundário substituiremos os índices 1 por 2.

Definidas estas grandezas, vejamos como chegar à relação mencionada.

Por definição de coeficiente de dispersão, teremos:

$$\vec{\phi}_{d1} = \vec{\phi}_{1L} (v_1 - 1) = v_1 \vec{\phi}_{1L} - \vec{\phi}_{1L}$$

$$v_1 \vec{\phi}_{1L} = \vec{\phi}_t = L_{11} I_1$$

logo:

$$\vec{\phi}_{d1} = L_{11} I_1 - \frac{L_{11}}{v_1} I_1 = L_{11} I_1 \left(1 - \frac{1}{v_1}\right) =$$

$$= L_{11} I_1 \left(\frac{v_1 - 1}{v_1}\right) = \lambda_{11} I_1$$

donde

$$\lambda_{11} = L_{11} \left(\frac{v_1 - 1}{v_1}\right) \quad (1)$$

Isto no que se refere ao primário.

Analisemos agora o secundário.

Teremos do mesmo modo:

$$\lambda_{22} = L_{22} \left(\frac{v_2 - 1}{v_2}\right)$$

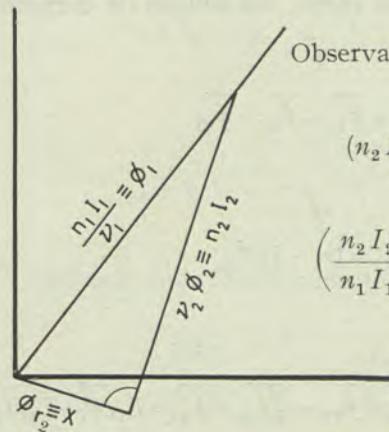
Como,

$$L_{22} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cdot L_{11} \quad \text{teremos:}$$

$$\lambda_{22} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 L_{11} \left(\frac{v_2 - 1}{v_2}\right)$$

Em termos do primário:

$$\lambda_{12} = \frac{n_2}{n_1} L_{11} \left(\frac{v_2 - 1}{v_2}\right) \frac{I_2}{I_1} \quad (1-a)$$



Observando a figura junta:

$$(n_2 I_2)^2 + X^2 = \left(\frac{n_1 I_1}{v_1}\right)^2$$

$$\left(\frac{n_2 I_2}{n_1 I_1}\right)^2 + \frac{X^2}{(n_1 I_1)^2} = \frac{1}{v_1^2}$$

que podemos escrever muito aproximadamente:

$$\frac{n_2 I_2}{n_1 I_1} = \frac{1}{v_1}$$

Substituindo em (1-a) temos:

$$\lambda_{12} = L_{11} \left(\frac{v_2 - 1}{v_2}\right) \frac{1}{v_1} \approx L_{11} \left(\frac{v_1 - 1}{v_1}\right) \cdot \frac{1}{v_1} \quad (1-b)$$

A expressão que acabamos de escrever é bastante correcta pois que, como se sabe, o coeficiente de dispersão no primário é muito aproximadamente igual ao coeficiente de dispersão no secundário:

$$v_1 \approx v_2 \quad (v_1 \approx v_2 \approx \sqrt{v_1 v_2})$$

Somando (1) e (1-b) teremos:

$$\lambda_{11} + \lambda_{12} = L_{11} \left(\frac{v_1 - 1}{v_1}\right) \left(1 + \frac{1}{v_1}\right) \quad (1-c)$$

Para outra carga  $I'$ , teremos imediatamente:

$$\lambda'_{11} + \lambda'_{12} = L'_{11} \left(\frac{v'_1 - 1}{v'_1}\right) \left(1 + \frac{1}{v'_1}\right) \quad (2)$$

e por conseguinte:

$$\frac{\lambda'_{11} + \lambda'_{12}}{\lambda_{11} + \lambda_{12}} = \frac{(v_1'^2 - 1) v_1'^2}{(v_1^2 - 1) v_1^2} \cdot \frac{L'_{11}}{L_{11}} \quad (3)$$

Vamos tentar substituir, progressivamente, nesta expressão, as grandezas que nela intervêm por outras que permitirão resolver praticamente o nosso problema.

Com este fim exprimiremos o fluxo resultante no primário:  $\phi_{r1}$ , em carga, em função da corrente magnetizante:

$$\vec{\phi}_{r1} = \vec{\phi}_{1L} - \vec{\phi}_{2L} + \vec{\phi}_{d1}$$

Como:

$$\vec{\phi}_{d1} = (v_1 - 1) \vec{\phi}_{1L}$$

resulta:

$$\vec{\phi}_{r1} = \vec{\phi}_{1L} - \vec{\phi}_{2L} + v_1 \vec{\phi}_{1L} - \vec{\phi}_{1L} = v_1 \vec{\phi}_{1L} - \vec{\phi}_{2L} = L_{11} I_1 - L_M I_2$$

Ora:

$$\vec{\phi}_{1L} = l_{11} I_1 = \frac{n_1}{n_2} L_M I_1$$

e portanto:

$$\vec{\phi}_{r1} = L_{11} I_1 - \frac{n_2}{n_1} l_{11} I_2$$

atendendo a que:

$$l_{11} = L_{11} - \lambda_{11}$$

vem:

$$\vec{\phi}_{r1} = L_{11} I_1 - \frac{n_2}{n_1} L_{11} I_2 + \frac{n_2}{n_1} \lambda_{11} I_2$$

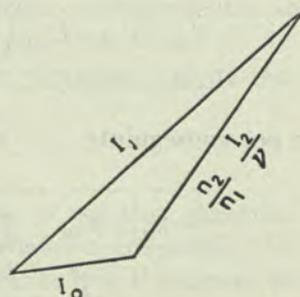
e, pela expressão (1):

$$\vec{\phi}_{r1} = L_{11} I_1 - \frac{n_2}{n_1} L_{11} I_2 + \frac{n_2}{n_1} L_{11} \left( \frac{v_1 - 1}{v_1} \right) I_2$$

$$\vec{\phi}_{r1} = L_{11} I_1 - \frac{n_2}{n_1} L_{11} I_2 \left( 1 - \frac{v_1 - 1}{v_1} \right)$$

$$\vec{\phi}_{r1} = L_{11} I_1 - \frac{n_2}{n_1} L_{11} \frac{I_2}{v_1} =$$

$$= \vec{\phi}_{r1} = L_{11} \left( I_1 - \frac{n_2}{n_1} \frac{I_2}{v_1} \right)$$



### I.1.2 — EM CONCLUSÃO:

$$\vec{\phi}_{r1} = L_{11} I_o$$

Para outra carga  $I'$ :

$$\vec{\phi}'_{r1} = L'_{11} I'_o$$

Podemos, portanto, escrever a seguinte relação:

$$\frac{L'_{11}}{L_{11}} = \frac{\vec{\phi}'_{r1}}{\vec{\phi}_{r1}} \cdot \frac{I_o}{I'_o} \quad (4)$$

que substituída em (3) nos conduz a:

$$\frac{\lambda'_{11} + \lambda'_{12}}{\lambda_{11} + \lambda_{12}} = \frac{(v_1'^2 - 1) v_1'^2}{(v_1^2 - 1) v_1^2} \cdot \frac{\vec{\phi}'_{r1}}{\vec{\phi}_{r1}} \cdot \frac{I_o}{I'_o} \quad (5)$$

ou ainda:

$$\frac{X'_1}{X_1} = \frac{(v_1'^2 - 1) v_1'^2}{(v_1^2 - 1) v_1^2} \cdot \frac{\vec{\phi}'_{r1}}{\vec{\phi}_{r1}} \cdot \frac{I_o}{I'_o} \quad (6)$$

### I.1.3 — COMPARAÇÃO COM A ANÁLISE CLÁSSICA

Vamos verificar que a análise clássica mais cuidada nos conduz à expressão (6) à parte o factor muito importante:

$$\frac{\vec{\phi}'_{r1}}{\vec{\phi}_{r1}} = \frac{E'_r}{E_r}$$

A análise clássica diz-nos que o diâmetro do diagrama de círculo é dado pela expressão:

$$D_{1A} = \frac{V_1}{v_1^2 X_1}$$

Sendo  $V_1$  a tensão primária em volts.

Por outro lado, diz-nos ainda que o quadrado do coeficiente de dispersão se pode escrever:

$$v_1^2 \approx \frac{D_1 + I_o}{D_1}$$

Em qualquer bom livro da especialidade se demonstram estas duas expressões.

Destas duas igualdades resulta imediatamente:

$$X_1 = \frac{(v_1^2 - 1) V_1}{I_o v_1^2}$$

Agora teremos de admitir, apesar do título, um raciocínio alheio à análise clássica que consiste em admitir que todas as grandezas da expressão anterior variam para outra carga:

$$X'_1 = \frac{(v_1'^2 - 1) V_1}{I_o' v_1'^2}$$

e portanto:

$$\frac{X'_1}{X_1} = \frac{(v_1'^2 - 1) v_1^2}{(v_1^2 - 1) v_1'^2} \cdot \frac{I_o}{I_o'}$$

Como se vê, esta expressão difere da (6) pela ausência do factor:

$$\frac{E_r'}{E_r}$$

1.1.4 — Recapitulemos o significado das grandezas que intervêm na expressão (6)

$X'_1$  — Somatório da reactância do primário e da reactância do secundário reduzida ao primário para a carga  $I_1'$  —

$X_1$  — Somatório da reactância do primário e da reactância do secundário reduzida ao primário para a carga  $I_1$ .

$v_1'$  — Coeficiente de dispersão correspondente à carga  $I_1'$  —

$v_1$  — Coeficiente de dispersão correspondente à carga  $I_1$  —

$\phi_{r1}'$  — Fluxo resultante no primário para a carga  $I_1'$ .

$\phi_{r1}$  — Fluxo resultante no primário para a carga  $I_1$ .

$I_o'$  — Corrente magnetizante para a carga  $I_1'$ .

$I_o$  — Corrente magnetizante para a carga  $I_1$ .

Depois deste breve parêntesis, continuemos na substituição de grandezas. Nada nos impede que consideremos dois círculos fictícios passando um por  $I_{cce}$  e o outro por  $I'_{cc}$ , como a seguir se indica. Identifiquemos  $I_1'$  com  $I'_{cc}$  e  $I_1$  com  $I_{cce}$ . Recordamos ainda que  $I_{cce}$  é a corrente de c. c. extrapolada e  $I'_{cc}$  a verdadeira corrente de arranque a plena tensão.



Como já se escreveu e é do conhecimento de todos, através da análise clássica, os coeficientes de dispersão, relativamente a estes dois regimes, têm as seguintes expressões:

$$v_1 \approx \sqrt{v_1 v_2} = \sqrt{1 + \frac{O D''}{D'' F}} \quad (a)$$

(7)

$$v_1' \approx \sqrt{v_1' v_2'} = \sqrt{1 + \frac{O D'}{D' F'}} \quad (b)$$

Podemos ainda escrever muito aproximadamente:

$$v_1 = \sqrt{1 + \frac{O D''}{D'' F}} \approx \sqrt{1 + \frac{I_o}{I_{cce}}} = 1 + \frac{I_o}{2 I_{cce}} -$$

$$- \frac{I_o^2}{8 I_{cce}^2} + \dots \approx 1 + \frac{I_o}{2 I_{cce}} \quad (a)$$

(8)

$$v_1' = \sqrt{1 + \frac{O D'}{D' F'}} \approx \sqrt{1 + \frac{I_o'}{I'_{cc}}} = 1 + \frac{I_o'}{2 I'_{cc}} -$$

$$- \frac{I_o'^2}{8 I'_{cc}{}^2} + \dots \approx 1 + \frac{I_o'}{2 I'_{cc}} \quad (b)$$

Basta olharmos para a fig. 3 para concluirmos que, da substituição das equações (7) pelas (8) na expressão (6), pode resultar um erro, embora geralmente pequeno, na avaliação do cociente das reactâncias  $\frac{X'_1}{X_1}$ .

Na realidade, em geral, vamos obter  $\frac{X'_1}{X_1}$  por excesso e, conseqüentemente, a verdadeira corrente de arranque por defeito. É o caso que se mostra na

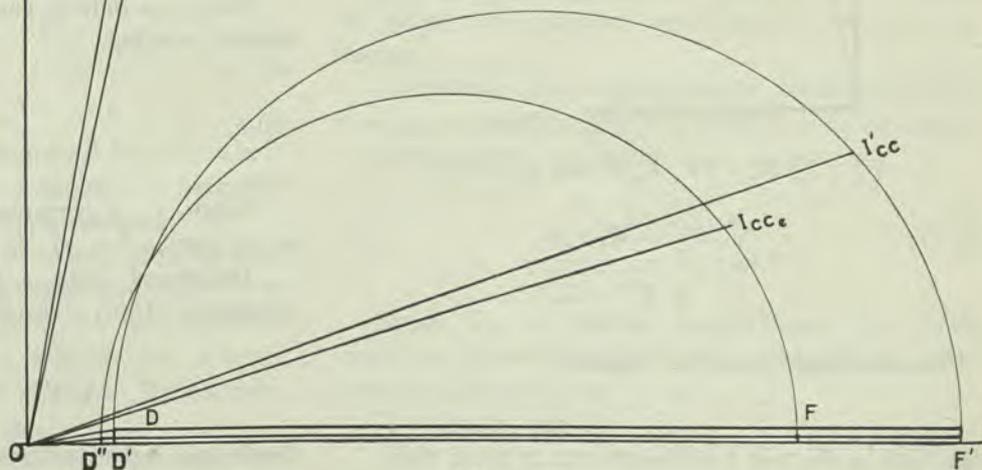


Fig. 3

figura. Vamos avaliar  $v_1'$  em relação a  $v_1$  por excesso, pois que  $I'_{cc}$  se afasta mais do que  $I_{cce}$  do diâmetro do círculo respectivo.

Contudo, faremos a substituição apontada, o que nos permitirá obter a corrente de arranque em primeira aproximação. Não esqueceremos, evidentemente, de introduzir, logo a seguir, a correcção simultânea de  $v_1$  e  $v_1'$  bastante fácil, como veremos, no campo prático, uma vez obtida, em primeira aproximação, a corrente de arranque  $I'_{cc}$ . Até lá, substituindo na expressão (6) as expressões (8):

$$\frac{X_1'}{X_1} = \frac{\left[ \left( 1 + \frac{I_o'}{2I'_{cc}} \right)^2 - 1 \right] \left[ 1 + \frac{I_o}{2I_{cc}} \right]^2 \dot{\phi}'_{r1} \cdot I_o}{\left[ \left( 1 + \frac{I_o}{2I_{cc}} \right)^2 - 1 \right] \left[ 1 + \frac{I_o'}{2I'_{cc}} \right]^2 \dot{\phi}'_{r1} \cdot I_o'}$$

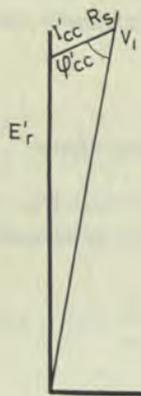
ou simplificando:

$$\frac{X_1'}{X_1} = \frac{\dot{\phi}'_{r1}}{\dot{\phi}'_{r1}} \cdot \frac{4I'_{cc} + I_o'}{4I_{cc} + I_o} \cdot \frac{(2I_{cc} + I_o)^2}{(2I'_{cc} + I_o')^2}$$

Como os fluxos resultantes são proporcionais às f. e. m. resultantes, podemos ainda escrever:

$$\frac{X_1'}{X_1} = \frac{E_r'}{E_r} \cdot \frac{4I'_{cc} + I_o'}{4I_{cc} + I_o} \cdot \frac{(2I_{cc} + I_o)^2}{(2I'_{cc} + I_o')^2} \quad (9)$$

Vamos, finalmente, exprimir  $E_r'$  em função de  $I'_{cc}$ :



$$I'_{cc} = \frac{V_1}{\sqrt{R_1'^2 + X_1'^2}} \quad (e)$$

$$\varphi'_{cc} = \text{arc tg} \frac{X_1'}{R_1'} \quad (f)$$

$$V_1^2 + I_{cc}'^2 R_s^2 - 2V_1 I'_{cc} R_s \cos \varphi'_{cc} = E_r'^2$$

$$\cos \varphi'_{cc} = \frac{R_1'}{\sqrt{R_1'^2 + X_1'^2}}$$

Destas duas equações resulta:

$$V_1^2 + I_{cc}'^2 R_s^2 - 2V_1 I'_{cc} R_s \frac{R_1'}{\sqrt{R_1'^2 + X_1'^2}} = E_r'^2$$

ou

$$E_r' = V_1 \sqrt{1 + \frac{I_{cc}'^2 R_s^2}{V_1^2} - \frac{2I'_{cc} R_s R_1'}{V_1 \sqrt{R_1'^2 + X_1'^2}}}$$

Tomando em consideração a expressão (e):

$$\begin{aligned} E_r' &= V_1 \sqrt{1 + \frac{I_{cc}'^2 R_s^2}{V_1^2} - \frac{2I'_{cc} R_s R_1'}{V_1^2}} = \\ &= E_r' = \sqrt{V_1^2 - (2R_s R_1' - R_s^2) I_{cc}'^2} \quad (10) \end{aligned}$$

$R_s$  é, como sabemos, a resistência ôhmica primária por fase.

Vejamos como exprimir  $E_r$  em grandezas convenientes.

Pela expressão (9), concluímos imediatamente que a reactância  $X_1$ , pode ser definida, não considerando ainda a última observação pela seguinte expressão:

$$X_1 = E_r \cdot \frac{4I_{cc} + I_o}{(2I_{cc} + I_o)^2}$$

Pretendemos identificar  $X_1$  com a reactância definida pela corrente nominal no ensaio de curto-circuito à tensão reduzida  $v_{1cc}$ .

Teremos, então, por analogia com a expressão (10):

$$e_r = \sqrt{v_{1cc}^2 - (2R_s R_1 - R_s^2) I_{1n}^2}$$

e portanto  $X_1$  escrever-se-á:

$$X_1 = \frac{4I_{1n} + i_o}{(2I_{1n} + i_o)^2} \sqrt{v_{1cc}^2 - (2R_s R_1 - R_s^2) I_{1n}^2}$$

Escrevemos  $i_o$ , pois se trata da corrente magnetizante à tensão reduzida  $v_{1cc}$ , correspondente à f. e. m.  $e_r$ .

Podemos definir esta reactância em função da tensão nominal:

$$(10-a) \quad X_1 = \frac{4I_{cc} + I_{oe}}{(2I_{cc} + I_{oe})^2} \cdot \sqrt{V_1^2 - (2R_s R_1 - R_s^2) I_{cc}^2}$$

Sendo  $I_{oe}$  a corrente magnetizante extrapolada de  $e_r$  para a f. e. m.  $E_r$  definida pela expressão II.

Definimos, pois, a reactância em questão pela expressão (10-a) e teremos

$$E_r = \sqrt{V_1^2 - (2R_s R_1 - R_s^2) I_{cc}^2} \quad (11)$$

desde que substituamos na expressão (9) a corrente  $I_o$  por  $I_{oe}$ .

Frizamos novamente que a equação (10 a) se deve escrever, com mais rigor, substituindo  $I_{cc}$  pelo diâmetro  $D''F$ , de acordo com a observação feita. Se o não fazemos já é para podermos contrapor à verdadeira corrente de arranque  $I'_{cc}$  a corrente extrapolada  $I_{cc}$ .

Faremos a substituição apontada quando entrarmos no campo prático, quando tivermos igualmente que substituir  $I'_{cc}$  pelo diâmetro correspondente.

I.1.5 — Torna-se bastante claro que o ensaio de curto-circuito à tensão reduzida  $v_{1cc}$  tem por intuito definir uma corrente de arranque  $I_{cc}$  ou indirectamente uma reactância  $X_1$  independente do nível de saturação magnética. É evidente que à tensão  $v_{1cc}$  os A. E. absorvidos pelo ferro são praticamente nulos, figurando apenas os do entreferro. Percebe-se, pois, que o cálculo desta reactância  $X_1$  possa ser bastante rigoroso, uma vez que não entram considerações sobre a saturação do ferro. Na realidade, temos sempre obtido, pelo cálculo, valores da corrente de curto-circuito extrapolada que não diferem mais de 3 % do valor de ensaio.

A equação (10-a) tal como ficou ainda escrita dá-nos uma informação de quanto se afasta da realidade a hipótese  $I_{cc} = D''F$ , uma vez calculada a reactância  $X_1$ . Isto é verdade, claro está, desde que os coeficientes de dispersão do estator e do rotor sejam sensivelmente iguais. Ao calcularmos as reactâncias temos uma indicação sobre o eventual afastamento destes coeficientes, porque logo que a reactância do rotor reduzida ao estator se afasta perceptivelmente da do estator, também os coeficientes de dispersão se afastarão um do outro. Devemos fazer notar que nunca observámos uma divergência sensível.

Substituindo, então, as expressões (10) e (11) e ainda  $I_o$  por  $I_{oe}$  na fórmula (9), teremos finalmente:

$$\frac{X'_1}{X_1} = \frac{\sqrt{V_1^2 - (2R_s R'_1 - R_s^2) I_{cc}^2}}{\sqrt{V_1^2 - (2R_s R_1 - R_s^2) I_{cc}^2}} \cdot \frac{(2I_{cc} + I_{oe})^2}{(2I'_{cc} + I_o)^2} \cdot \frac{4I'_{cc} + I_o}{4I_{cc} + I_{oe}}$$

I.1.6 — Antes de continuarmos, faremos ainda algumas observações para a obtenção do diâmetro do círculo dos pequenos escorregamentos.

Embora não nos interesse saber, para a resolução do problema que nos propusemos resolver, se a reactância  $X_1$ , dada por (10-a) ou pelo ensaio a tensão reduzida, tem alguma relação com a reactância nominal, vamos só a título de curiosidade, analisar a questão rapidamente.

Faz-se notar que vamos aplicar o raciocínio que se segue a um motor de rotor bobinado.

Justificar-nos-emos, tirando, em seguida, conclusões para os de dupla gaiola.

Substituindo na expressão (10-a), como já se fez notar várias vezes,  $I_{cc}$  pelo diâmetro respectivo que passamos a chamar  $D$ , obtemos:

$$X_1 = \frac{4D + I_{oe}}{(2D + I_{oe})^2} \cdot \sqrt{V_1^2 - (2R_s R_1 - R_s^2) I_{cc}^2}$$

Ver-se-á, mais tarde, que podemos ainda escrever com suficiente rigor:

$$X_1 = \frac{\sqrt{V_1^2 - (2R_s R_1 - R_s^2) I_{cc}^2}}{D + I_{oe}} \quad (11-a)$$

Desta expressão, conclui-se que o ensaio de curto-circuito, a tensão reduzida, nos define o diâmetro:

$$D = \frac{\sqrt{V_1^2 - (2R_s R_1 - R_s^2) I_{cc}^2} - I_{oe} X_1}{X_1} \quad (11-b)$$

Escrevamos agora o diâmetro  $D_n$  do círculo que melhor nos defina o regime nominal:

Torna-se claro que, sendo a f. e. m. nominal dada por:

$$E_{rn} = \sqrt{V_1^2 + I_{1n}^2 R_s^2 - 2V_1 I_{1n} R_s \cos \varphi_n}$$

$D_n$  poderá ser definido por:

$$D_n = \frac{\sqrt{V_1^2 - 2V_1 I_{1n} R_s \cos \varphi_n + I_{1n}^2 R_s^2} - I_o X_n}{X_n} \quad (11-c)$$

Sendo  $I_o$  a corrente magnetizante correspondente à f. e. m. nominal.

É sabido que, para a zona dos pequenos escorregamentos, o diâmetro  $D_n$  se pode considerar aproximadamente independente da carga, isto é, temos de facto, com razoável aproximação, um arco de círculo.

Admitindo esta aproximação, suficientemente rigorosa na prática, temos a possibilidade de definir  $D_n$  pelo regime em vazio:

$$D_n = \frac{V_1 - I_{ov} X_n}{X_n} \quad (11-d)$$

Sendo  $I_{ov}$  a corrente magnetizante em vazio visto que presentemente temos coincidência entre a tensão aplicada e a f. e. m.

É evidente que  $I_{ov} > I_o$ .

Quer dizer a expressão 11-d dar-nos-ia com razoável rigor o diâmetro do círculo nominal se sou-

béssemos calcular rigorosamente a reactância nominal.

Como procedem muitos autores na prática para determinar o diâmetro que melhor defina as características nominais?

Substituem na expressão 11-d a reactância  $X_n$  pela reactância indirectamente definida no ensaio de curto-circuito, isto é a reactância  $X_1$  em regime não saturado:

$$D_n \approx D_1 = \frac{V_1 - I_{ov} X_1}{X_1} \quad (11-e)$$

Será esta substituição aceitável? Vejamos:

Se analisarmos a f. e. m. da expressão 11-b:

$E_{rcc} = \sqrt{V_1^2 - (2R_s R_1 - R_s^2) I_{cc}^2}$  concluímos que, em regime de marcha, a carga que conduz a esta f. e. m. terá, eventualmente, que exceder muito pouco a corrente nominal, pois, em marcha, o factor de potência é muito superior ao do regime não saturado de curto-circuito. Podemos, pois, continuar a aplicar o princípio anterior e escrever:

$$D_n = \frac{\sqrt{V_1^2 - (2R_s R_1 - R_s^2) I_{cc}^2} - I_{oc} X_n}{X_n} \quad (11-f)$$

sendo, como sempre,  $I_{oc}$  a corrente magnetizante correspondente a esta f. e. m.. Comparemos 11-f com 11-b. Concluímos que as f. e. m. são iguais a  $E_{rcc}$  e que:  $I_{oc} > I_{oe}$ , o que é evidente para um motor que manifeste saturação no ferro.

Escrevamos a reactância  $X_1$  em regime não saturado como se indica em 11-a:

$$X_1 = \frac{E_{rcc}}{D + I_{oe}}$$

e a reactância  $X_n$  a partir de 11-f:

$$X_n = \frac{E_{rcc}}{D_n + I_{oc}}$$

donde:

$$\frac{X_1}{X_n} = \frac{D_n + I_{oc}}{D + I_{oe}} \quad (11-g)$$

Se substituirmos  $X_n$  em (11-d), por  $X_1$ , tirado de (11-g), obtemos um diâmetro:

$$D_1 = \frac{\frac{V_1}{D_n + I_{oc}} - I_{ov} X_n}{\frac{D + I_{oe}}{X_n}} < D_n$$

$D_n > D_1 > D$  (fácil de verificar por ensaio)

Em conclusão: A prática corrente destes autores conduz sistematicamente a um diâmetro menor do que aquele que definiria com rigor o regime nominal. Porém esta prática é aconselhável, pois conduz a resultados nominais ligeiramente pessimistas que, de resto, se podem corrigir, como fazemos normalmente, sobretudo para obter o factor de potência nominal.

Para os motores de rotor bobinado se bem que  $X_1 > X_n$  temos então uma aproximação suficiente, na prática, avaliando  $X_n$  por  $X_1$ .

Quanto aos motores de dupla gaiola?

Tratando-se agora de um motor de dupla gaiola, tudo o que dissémos se mantém desde que substituamos na expressão (II-a) o diâmetro  $D$  pelo diâmetro do círculo dos pequenos escorregamentos  $D_o$   $F_o$  (introdução 5; equação (d), fig. 1) e ainda  $X_1$  pela expressão:

$$X_{1o} = X_s + x_a + \frac{r_1^2 x_2}{r^2} \quad (\text{equação d})$$

assim como  $I_{cc}$  por  $I_{cc'}$  que é a corrente de curto-circuito teórica extrapolada, como dissémos na introdução.

Isto era evidente visto implicar uma propriedade intrínseca dos motores de dupla gaiola. Portanto, para estes motores, a reactância  $X_1 = X_s + x_a + \frac{r_1^2 x_2}{r^2 + x_2^2}$  sendo uma reactância correspondente ao regime não saturado em curto-circuito, está longe de se aproximar da reactância nominal  $X_{1o}$ , não só pela razão apontada nos motores de anéis como pelo facto destas duas reactâncias terem estruturalmente expressões diferentes.

I.1.7 — Substituindo como já indicámos as expressões (10) e (11) e ainda  $I_o$  por  $I_{oe}$  na fórmula (9), teremos, finalmente, a expressão que voltamos a repetir:

$$\frac{X_1'}{X_1} = \frac{\sqrt{V_1^2 - (2R_s R_1' - R_s^2) I_{cc}'^2} \cdot (2I_{cc} + I_{oe})^2 \cdot 4I_{cc}' + I_{oe}'}{\sqrt{V_1^2 - (2R_s R_1 - R_s^2) I_{cc}^2} \cdot (2I_{cc}' + I_o')^2 \cdot 4I_{cc} + I_{oe}'} \quad (12)$$

## I.2 — ESTABELECIMENTO DA EXPRESSÃO QUE NOS PERMITE DETERMINAR A CORRENTE DE ARRANQUE $I'_{cc}$

I.2.1 — PRIMEIRA APROXIMAÇÃO — Escrevamos as equações formais da corrente de curto-circuito extrapolada  $I_{cc}$  e da corrente de arranque  $I'_{cc}$ :

$$I_{cc}^2 = \frac{V_1^2}{R_1^2 + X_1^2} \quad (12-a)$$

$$I'_{cc} = \frac{V_1^2}{R_1'^2 + X_1'^2} \quad (12-b)$$

Destas duas equações resulta:

$$\frac{X_1'}{X_1} = \sqrt{\frac{V_1^2 - R_1'^2 I'_{cc}}{V_1^2 - R_1^2 I'_{cc}}} \cdot \frac{I'_{cc}}{I'_{cc}} \quad (13)$$

Das expressões (12), a que chegámos, e (13) resulta a seguinte expressão para  $I'_{cc}$  que, de resto, se obteria substituindo  $X_1'$ , tirada da equação (12), na expressão (12-b):

$$I'_{cc} = \frac{V_1 \sqrt{V_1^2 - K X_1'^2 - (2 R_s R_1 - R_s^2) I'_{cc}}}{\sqrt{V_1^2 R_1'^2 - (2 R_s R_1' - R_s^2) K X_1'^2 - (2 R_s R_1 - R_s^2) R_1'^2 I'_{cc}}} \quad (14)$$

tendo  $K$  a expressão que se segue:

$$K = \frac{(4 I'_{cc} + I'_o)^2 I'_{cc}}{(2 I'_{cc} + I'_o)^4} \cdot \frac{(2 I_{cce} + I_{oe})^4}{(4 I_{cce} + I_{oe})^2} = \left[ \frac{4 I'_{cc} + I'_o}{4 I'_{cc} + I'_o \left( \frac{I'_o}{I'_{cc}} + 4 \right)} \right]^2 \cdot \frac{(2 I_{cce} + I_{oe})^4}{(4 I_{cce} + I_{oe})^2} = K = A \cdot B$$

Analiseemos a expressão (14).

A resistência óhmica primária por fase  $R_s$  é calculável, assim como:

$$R_1 = R_s + r_a + \frac{r_2 r + x_2^2}{r^2 + x_2^2} \times r_1$$

pois  $x_2$  é a reactância da gaiola interior por fase reduzida ao primário em regime não saturado.

A corrente de curto-circuito extrapolada  $I'_{cc}$  também é calculável porque é função das reactâncias em regime não saturado, assim como a reactância conjunta:

$$X_1 = X_s + x_a + \frac{r_1^2 x_2}{r^2 + x_2^2}$$

O factor  $B$  de  $K$  é igualmente calculável, pois é uma função de  $I'_{cc}$  e da corrente magnetizante extrapolada  $I'_{oe}$  muito fácil de obter, uma vez calculada a corrente magnetizante em vazio  $I_{ov}$  necessária para definir o regime nominal, como vimos.

Quere dizer, até agora não houve praticamente nenhum trabalho suplementar em relação à teoria

clássica, pois todas as grandezas mencionadas, à excepção de  $I_{oe}$ , tinham de ser calculadas. A obtenção do valor de  $I_{oe}$  é muito rápida.

Falta-nos analisar  $R_1'$  e o factor  $A$  de  $K$ .

Ora sendo:

$$R_1' = R_s + r_a + \frac{r_2 r + x_2^2}{r^2 + x_2^2} r_1$$

que difere do termo já conhecido  $R_1$ , apenas pelo facto da reactância da gaiola interior  $x_2$  ter variado do regime não saturado para o de arranque.

Verificou-se que qualquer pequeno erro na avaliação de  $x_2'$ , a partir de  $x_2$ , tem uma pequena repercussão no valor de  $R_1'$ .

O desvio máximo que encontrámos, em dezenas de cálculos, entre  $R_1$  e  $R_1'$ , este calculado admitindo a hipótese que justificaremos a seguir:

$$x_2'^2 = 0,6 x_2^2$$

foi de 7%. Compreende-se então que o desvio para o verdadeiro valor de  $R_1'$  seja muito menor, admitindo a última relação, pois que, como sabemos

$$x_2'^2 < x_2^2$$

Fomos conduzidos ao coeficiente 0,6, em dezenas de ensaios, da maneira que se segue.

Como veremos, na última parte deste trabalho, o binário de arranque tem a seguinte expressão:

$$C_{a_{K \varepsilon m}} = \frac{2,925 (R_1' - R_s) I'_{cc}}{N_1 v_1'^2} \quad \text{em que } v_1'^2 = I + \frac{I'_o}{D'}$$

Sendo  $N_1$  a velocidade de sincronismo expressa em rotações por minuto. Se determinarmos, por ensaio, o binário e a corrente de arranque a plena tensão e ainda a resistência óhmica primária por fase  $R_s$  podemos determinar o valor de  $R_1'$  pois o coeficiente de dispersão  $v_1'$  no arranque pode obter-se com suficiente rigor conhecida a curva de magnetização do motor, que se determina sempre em todos os motores ensaiados.

Esta curva permite-nos determinar a corrente magnetizante  $I'_o$  correspondente ao arranque por nos ser possível obter com suficiente aproximação a f. e. m. no arranque:

$$E'_r = \sqrt{V_1^2 - (2 R_s R_1' - R_s^2) I'_{cc}}$$

Perguntar-se-á como se determina  $E'_r$  se depende precisamente da resistência  $R'_1$  que se quer obter. Arbitrando o coeficiente 0,6, obtendo desta forma um valor para  $R'_1$  e, portanto, para  $E'_r$  que será suficientemente correcto, tendo em consideração aquilo que se disse sobre a influência de  $x_2'^2$  no valor de  $R'_1$ . De resto, a conclusão a que chegámos nos ensaios realizados situa o coeficiente entre 0,5 e 0,7 conforme o nível de saturação do motor.

Quanto ao diâmetro  $D'$  fica agora definido pelo ensaio.

Em conclusão, podemos calcular  $R'_1$  com suficiente aproximação pela expressão que se segue:

$$R'_1 = R_s + r_a + \frac{r_2 r + 0,6 x_2'^2}{r^2 + 0,6 x_2'^2} r_1$$

Resta-nos o factor  $A$  de  $K$  :

$$A = \left[ \frac{4 I'_{cc} + I'_o}{4 I'_{cc} + I'_o \left( \frac{I'_o}{I'_{cc}} + 4 \right)} \right]^2 \quad (15)$$

Calculámos o valor de  $A$  em dezenas de motores

ensaiados de todas as categorias e obtivemos os valores extremos:

$$\begin{cases} 0,864 \\ 0,963 \end{cases}$$

Em face desta conclusão, construímos as curvas que mais adiante se apresentam, tomando como parâmetro a corrente magnetizante no arranque:  $I'_o$ . Torna-se claro que uma das maneiras de resolver o problema será arbitrar para  $A$  um determinado número compreendido entre os extremos apontados definindo assim uma corrente  $I'_{cc}$  pela equação (14), corrente esta que nos deverá conduzir, pela expressão (15), ao valor arbitrado para  $A$ . Como  $I'_o$  depende da f. e. m. no arranque e da curva de magnetização, poderá parecer, apesar dos limites próximos do campo de variação de  $A$ , que o número de tentativas para se obter a harmonia desejada, seja, em média, muito elevado. De facto assim seria se não analisássemos a questão mais a fundo.

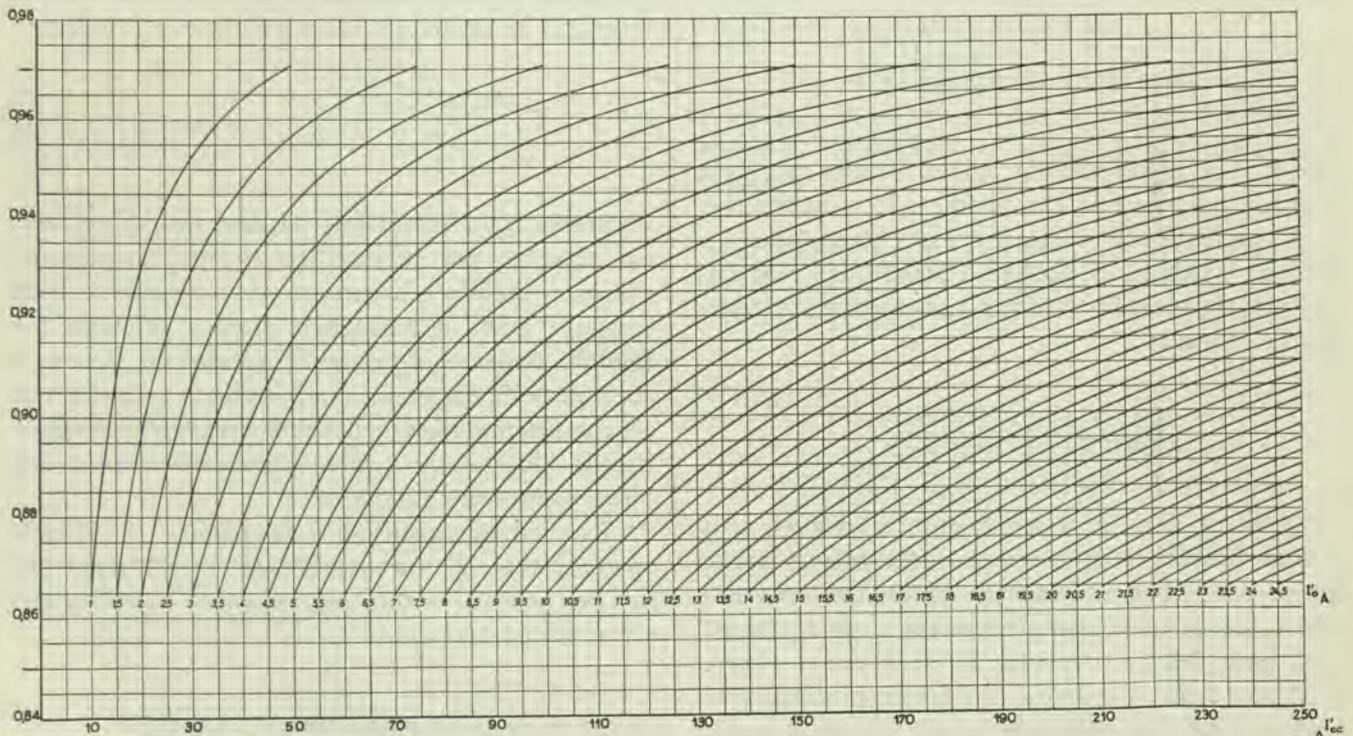
Estudámos os valores que tomava  $I'_o$  em função de  $I_{ov}$  (corrente magnetizante em vazio) em dezenas de motores e obtivemos os limites seguintes:

$$I'_o = 0,7 I_{ov}$$

$$I'_o = 0,865 I_{ov}$$

$$A = \left[ \frac{4 I'_{cc} + I'_o}{4 I'_{cc} + I'_o \left( \frac{I'_o}{I'_{cc}} + 4 \right)} \right]^2$$

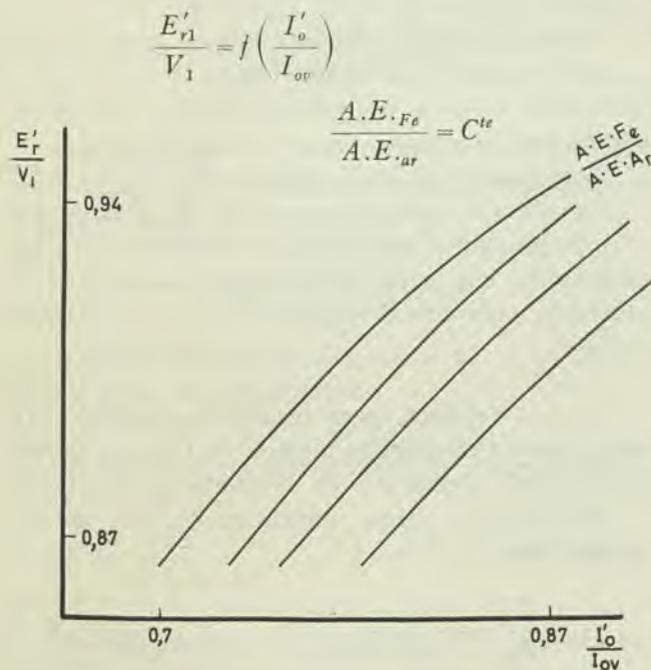
$$A = f(I'_{cc}) \quad I'_o = c^{I'_{cc}}$$



Estes limites apertados poderão parecer estranhos, à primeira vista, mas se analisarmos a fundo o assunto descobriremos a explicação. A f. e. m. no arranque varia muito pouco de motor para motor, como é evidente, e situa-se à volta de 0,9 da tensão aplicada. (Os limites andam entre 0,87 e 0,94). Isto significa que o cociente dos coeficientes de auto indução  $\frac{L'_{11}}{L_{11}}$  variará também entre limites apertados dada a proximidade na curva de magnetização dos pontos correspondentes aos dois regimes:

$$\frac{L'_{11}}{L_{11}} = \frac{E'_{r1}}{V_1} \cdot \frac{I_{ov}}{I'_o}$$

Em face destas conclusões, estudámos as curvas de magnetização dos nossos motores, o que nos permitiu traçar os gráficos seguintes que apresentamos apenas com um aspecto ilustrativo:



### 1.2.2 — MANEIRA DE PROCEDER

Começa-se por arbitrar para  $A$  o valor de 0,9 (recordar limites de variação  $A$ ) o que nos conduz, pela expressão (14), a uma corrente  $I'_{cc}$ . Com este valor temos a f. e. m.  $E'_r$  definida e como conhecemos o parâmetro: cociente dos A.E. absorvidos pelo ferro, A.E. absorvidos pelo entreferro (cálculo da corrente magnetizante em vazio), obtemos pelo gráfico anterior a corrente  $I'_o$ .

Utilizando as curvas  $A = f(I'_{cc})$   $I'_o = C^{te}$ , vamos obter um valor para  $A$  que normalmente não

será 0,9, porém, temos imediatamente uma indicação se devemos baixar ou aumentar o valor arbitrado para  $A$ .

Regra geral, depois de um certo treino, à segunda tentativa conseguimos a desejada harmonia.

Faz-se notar que todo este trabalho é muito rápido com o auxílio dos dois gráficos, tanto mais que as grandezas, que a expressão (14) encerra, ficam imutáveis à exceção do factor  $A$  de  $K$ .

Poderíamos encher páginas com exemplos de cálculos, porém, isso tornaria este trabalho interminável, por isso limitamo-nos a apontar a divergência máxima e mínima verificadas entre o cálculo da corrente de arranque em primeira aproximação e o ensaio:

erro máximo 11,5 %

erro mínimo 3 %

1.2.3 — Em conclusão, obtemos sistematicamente uma corrente de arranque inferior à do ensaio mas incomparavelmente mais próxima da realidade do que a clássica, sobretudo em motores muito saturados.

Isto era de esperar depois do que dissemos na observação a seguir às equações (8), isto é, o erro que vamos obter ficará muito reduzido se substituirmos as correntes pelos diâmetros respectivos. O número de tentativas para se obter finalmente a corrente de arranque com um erro pequeníssimo será muito reduzido, como veremos, visto que podemos partir da hipótese que a verdadeira corrente de arranque será cerca de 5 % superior à que obtivemos pela primeira aproximação.

1.2.4 — Torna-se ainda indispensável uma observação:

Nos motores em que, contando apenas com a secção ferro, fomos conduzidos pelo cálculo, a induções muito elevadas para a coroa do rotor (> 17.000G.) torna-se claro que temos na realidade induções muito menores, para pequenos escorregamentos, pois as linhas de força procurarão o veio cuja espessura intervirá na sua quase totalidade. Porém, no arranque, só intervirá a espessura equivalente de penetração para 50 c/s, tornando-se imediato que, para estes casos, se possa obter inclusivamente:

$$I'_o > I_{ov}$$

Ter-se-á que calcular a corrente de magnetização em vazio para determinar as características nominais e a corrente de magnetização no arranque e deduzir  $I'_o$  desta última.

1.3.1 — Substituindo as correntes  $I'_{cc}$  e  $I_{cc}$  pelos diâmetros respectivos, vamos, afinal, apenas alterar o valor de  $K$  na expressão (14) que continua a ser utilizada para a determinação da corrente de arranque.

Quer dizer que  $K$  passará a ser escrito da maneira que se segue:

$$K = \frac{(4D' + I'_o)^2 \cdot I'^2_{cc}}{(2D' + I'_o)^4} \cdot \frac{(2D + I_{oe})^4}{(4D + I_{oe})^2} = \frac{\left(D' + \frac{I'_o}{4}\right)^2}{\left(D' + \frac{I'_o}{2}\right)^4} \cdot \frac{\left(D + \frac{I_{oe}}{2}\right)^4}{\left(D + \frac{I_{oe}}{4}\right)^2} \cdot I'^2_{cc} \quad (16)$$

Pode parecer estranho que não se tenha substituído também  $I'^2_{cc}$  por  $D'^2$ , nesta última expressão. Analisando, com cuidado, verificaríamos que esta substituição não estaria certa, pois só podemos substituir correntes por diâmetros quando aquelas tenham sido utilizadas, em vez destes, para definir os coeficientes de dispersão.

Vamos simplificar a expressão de  $K$ :

Analisemos a expressão 6:

Esta pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{X'_1}{X_1} = \frac{(v'_1 v'_2 - 1) v_1 v_2}{(v_1 v_2 - 1) v'_1 v'_2} \cdot \frac{E'_{r1}}{E_{r1}} \cdot \frac{I_{oe}}{I'_o} \quad (6-a)$$

Na realidade a expressão de  $K$  apresentada, quando da obtenção da corrente de arranque, em primeira aproximação, não sofreria alteração, visto que, como vimos, tomámos:

$$v_1 \approx \sqrt{v_1 v_2} = 1 + \frac{I_{oe}}{2I_{cc}}$$

$$v'_1 \approx \sqrt{v'_1 v'_2} = 1 + \frac{I'_o}{2I'_{cc}}$$

Se tomarmos agora, ver equação (8):

$$\left. \begin{aligned} v_1 v_2 = 1 + \frac{I_{oe}}{D} \\ v'_1 v'_2 = 1 + \frac{I'_o}{D'} \end{aligned} \right\} \text{Teremos } \frac{X'_1}{X_1} = \frac{D + I_{oe}}{D' + I'_o} \cdot \frac{E'_{r1}}{E_{r1}} \text{ o que justifica a equação (11-a)}$$

e  $K$  escrever-se-á:

$$K = \frac{I'^2_{cc}}{(D' + I'_o)^2} (D + I_{oe})^2 = A' \cdot B' \quad (17)$$

Comparando (16) e (17) vê-se imediatamente que a divergência entre as duas expressões é muito pequena. Nenhuma é absolutamente rigorosa. Veremos, mais adiante, qual o erro que se comete na última, visto que será a adoptada para o cálculo definitivo da corrente de arranque, como acabámos de indicar.

### 1.3.2 — MANEIRA DE PROCEDER

Não temos mais que construir os diagramas da fig. 3. Temos todos os dados para obter o diâmetro  $D''F \diamond D$  a partir dos valores calculados:  $E_r$ ,  $I_{cc}$ ,  $R_s$  e  $I_{oe} \diamond OD''$ .

Arbitrando, para começar, um valor para  $I'_{cc}$  superior em 5% ao obtido em primeira aproximação, podemos calcular  $E'_r$  e  $R_s \cdot I'_{cc}$  (ver fig. 3).

Podemos admitir, em princípio, o mesmo valor a que chegámos anteriormente para  $I'_o$ , o que é admissível dada a pequena amplitude que usualmente tem a correcção de que nos ocupamos.

Temos assim definido um diâmetro  $D'F' \diamond D'$ .

Calculamos agora o novo valor de  $K$  dado por (17). Substituindo este valor na expressão (14), encontramos, em geral, imediatamente a corrente  $I'_{cc}$  arbitrada, com uma divergência que não se justifica corrigir.

1.3.3 — Vejamos, para terminar o capítulo primeiro, qual o erro que se pode ainda cometer depois da obtenção definitiva da corrente de arranque.

Baseámo-nos, como acabámos de ver, na expressão (6-a):

$$\frac{X'_1}{X_1} = \frac{(v'_1 v'_2 - 1) v_1 v_2}{(v_1 v_2 - 1) v'_1 v'_2} \cdot \frac{E'_{r1}}{E_{r1}} \cdot \frac{I_{oe}}{I'_o} \quad (6-a)$$

Tentemos escrever a equação correcta.

O diâmetro do diagrama de círculo é dado pela expressão:

$$D = \frac{E_{r1}}{v_1^2 X_1}$$

Por outro lado:

$$v_1 v_2 = 1 + \frac{I_{oe}}{D}$$

Destas duas expressões conclui-se que:

$$X_1 = \frac{(v_1 v_2 - 1) E_{r1}}{I_{oe} v_1^2}$$

logo:

$$\frac{X'_1}{X_1} = \frac{(v'_1 v'_2 - 1) v_1^2}{(v_1 v_2 - 1) v_1'^2} \cdot \frac{E'_{r1}}{E_{r1}} \cdot \frac{I_{oe}}{I'_o} \quad (6-b)$$

O erro, portanto, pode provir de:

$$\frac{v_1 v_2}{v'_1 v'_2} \neq \frac{v_1^2}{v_1'^2}$$

Relacionemos  $v_2$  e  $v_1$  por intermédio duma constante:

$$v_2 = K v_1$$

Conclusão: Só se  $v'_2$  se relacionar com  $v'_1$  pela mesma constante:

$$v'_2 = K v'_1$$

o erro será nulo:

$$\frac{v_1 v_2}{v'_1 v'_2} = \frac{K v_1^2}{K v_1'^2} = \frac{v_1^2}{v_1'^2}$$

Ora normalmente a constante de relação não será, claro está, a mesma, porém, compreende-se que o erro seja muito pequeno.

## CAPÍTULO II

### II.1 — CALCULO RAPIDO DA CORRENTE DE ARRANQUE

II.1.1 — Escrevamos novamente a equação (10-a):

$$X_1 = \frac{4I_{cce} + I_{oe}}{(2I_{cce} + I_{oe})^2} \sqrt{V_1^2 - (2R_s R_1 - R_s^2) I_{cce}^2}$$

Se substituirmos a reactância  $X_1$ , pela sua expressão, na equação (14) da corrente obtemos:

$$I'_{cc} = V_1 \sqrt{\frac{I - A}{R_1'^2 - (2R_s R_1' - R_s^2) A}} \quad (18)$$

sendo, como sempre:

$$A = \left[ \frac{4I'_{cc} + I'_o}{4I'_{cc} + I'_o \left( \frac{I'_o}{I'_{cc}} + 4 \right)} \right]^2 \quad (15)$$

Por meio das expressões (18) e (15) e das curvas indicadas no capítulo primeiro, resolvemos rapidamente o nosso problema. Porém estamos sujeitos

a um erro maior se os coeficientes de dispersão diferirem sensivelmente. Na realidade, baseámo-nos na expressão:

$$X'_1 = \frac{v'_1 v'_2 - 1}{v'_1 v'_2} \cdot \frac{E'_{r1}}{I'_o}$$

A expressão correcta será, como já vimos pela equação (6-b):

$$X'_{1c} = \frac{v'_1 v'_2 - 1}{v_1'^2} \cdot \frac{E'_{r1}}{I'_o}$$

Quer dizer que, por exemplo, se:

$$v'_2 > v'_1$$

$$X'_1 < X'_{1c}$$

isto é, vamos obter um valor da corrente de arranque por excesso.

II.1.2 — Verifica-se facilmente que as expressões (18) e (15) equivalem à seguinte expressão:

$$X'_1 = \frac{4I'_{cc} + I'_o}{(2I'_{cc} + I'_o)^2} \cdot \sqrt{V_1^2 - (2R_s R_1' - R_s^2) I_{cc}'^2}$$

o que era de esperar.

De (18) podemos tirar o valor exacto de  $A$ :

$$A = \frac{V_1^2 - R_1'^2 I_{cc}'^2}{V_1^2 - (2R_s R_1' - R_s^2) I_{cc}'^2}$$

que podemos comparar, em ensaio, com (15).

### II.2 — CONCLUSÃO FUNDAMENTAL

Analisando a expressão de  $A$  vê-se que, para um valor constante desta grandeza, se tem:

$$I'_{cc} = C^{te} \cdot I'_o$$

Esta conclusão permitiu-nos traçar rapidamente as curvas  $A = f(I'_{cc})$   $I'_o = C^{te}$ .

Deduz-se facilmente a expressão desta constante:

$$I'_{cc} = \frac{4\sqrt{A} - I + \sqrt{I + 8\sqrt{A}}}{8(I - \sqrt{A})} \cdot I'_o$$

Escrevamos agora novamente a expressão da corrente de arranque:

$$I'_{cc} = V_1 \sqrt{\frac{I - A}{R_1'^2 - (2R_s R_1' - R_s^2) A}}$$

Destas duas últimas expressões resulta:

$$I'_o = f(A) \cdot V_1$$

Podemos afirmar, para um determinado motor, que enquanto  $A$  for constante  $I'_o$  é proporcional à tensão e por conseguinte  $I'_{cc}$  é proporcional à tensão, isto é:

A corrente de arranque de um motor coincide com a corrente de curto-circuito extrapolada enquanto  $A$  se mantiver constante ou seja enquanto a corrente de magnetização for proporcional à tensão.

Logo que, aumentando gradualmente a tensão aplicada, a corrente de magnetização deixar de lhe ser proporcional, a corrente de arranque afasta-se do valor extrapolado.

## CAPÍTULO III

### III.1.1 — BINÁRIO DE ARRANQUE

III.1.1 — O valor do binário de arranque torna-se, agora, fácil de obter, uma vez que já conhecemos a corrente de arranque  $I'_{cc}$ .

### III.1.2 — PERDAS DE JOULE ROTÓRICAS DE ARRANQUE

Como vimos, a resistência conjunta rotórica, reduzida ao estator, tem a seguinte expressão:

$$r_a + r_1 \cdot \frac{r_2 r + 0,6 x_2^2}{r^2 + 0,6 x_2^2} = R_1' - R_s$$

e a corrente rotórica no arranque, reduzida ao estator:

$$\frac{I'_{cc}}{v_1'^2}$$

Porém, devido à dispersão no rotor, a corrente que nos conduz às perdas de Joule será:

$$\frac{I'_{cc}}{v_1'^2} v_2'$$

Por consequência, as perdas de Joule no rotor, para um motor trifásico, escrever-se-ão:

$$P_J = 3 (R_1' - R_s) \frac{I'_{cc}}{v_1'^4} v_2'^2$$

### III.1.3 — BINÁRIO DE ARRANQUE

Como:

$$2 \pi C_a \frac{N_1}{60} 9,8 = 3 (R_1' - R_s) \frac{I'_{cc}}{v_1'^4} v_2'^2$$

tiramos, finalmente, a expressão de  $C_a$ :

$$C_{a_{Kg.m.}} = \frac{3 (R_1' - R_s) \frac{I'_{cc}}{v_1'^4} v_2'^2 \cdot 60}{2 \pi N_1 \cdot 9,8} = \frac{2,925 (R_1' - R_s) I'_{cc}}{N_1 \frac{v_1'^4}{v_2'^2}}$$

Sendo  $N_1$  a velocidade de sincronismo expressa em número de rotações por minuto.

Vamos substituir:

$$\frac{v_1'^4}{v_2'^2} \text{ por } I + \frac{I'_o}{D'} = v_1' \cdot v_2'$$

e teremos finalmente:

$$C_{a_{Kg.m.}} = \frac{2,925 (R_1' - R_s) I'_{cc}}{N_1 \left( I + \frac{I'_o}{D'} \right)}$$

III.1.4 — Vejamos em que sentido actua o erro que se comete pelo facto de termos substituído

$$\frac{v_1'^4}{v_2'^2} \text{ por } v_1' \cdot v_2'$$

Podemos escrever:

$$\frac{v_1'^4}{v_2'^2} = \frac{v_1' v_2'}{\frac{v_2'^2}{v_1'^3} v_2'}$$

Portanto quando  $v_2' > v_1'$ :

$$\frac{v_1'^4}{v_2'^2} < v_1' v_2'$$

e o binário é avaliado por defeito.

O erro, como se compreende, é normalmente muito pequeno, no entanto, para atendermos a casos muito especiais, podemos organizar um quadro de ensaio que nos forneça a correcção a introduzir em função da relação reactância do estator, reactância do rotor reduzida ao estator.