

ANÁLISE GERAL CRÍTICA DOS MÉTODOS DE CÁLCULO MAIS IMPORTANTES DAS BARRAGENS-ABÓBADA *

En matière de grands barrages c'est la sécurité qui compte le plus.

A. COYNE — *Leçons sur les Grands Barrages*

JOAQUIM LAGINHA SERAFIM

Engenheiro Investigador, Chefe da Secção de Barragens
LABORATÓRIO NACIONAL DE ENGENHARIA CIVIL — LISBOA

1. GENERALIDADES

O aumento de segurança que se consegue dando às barragens de alvenaria ou de betão uma forma curva com a concavidade voltada para jusante, de há muito que foi notado pelos construtores de barragens. Efectivamente, as barragens mais antigas ainda hoje existentes, são, segundo NAVARRO e ARACYL, as que servem o abastecimento de água a Aden. Essas obras, construídas provavelmente antes do início da era cristã, alcançaram os nossos dias ao contrário do que aconteceu a todas as outras barragens muito posteriores. Tal resultado tem sido atribuído, com toda a razão, à forma curva em planta dessas barragens e ao facto delas se encontrarem abrigadas a jusante por um terraplano que as protege contra as variações de temperatura. As barragens de *Elche*, *Almanza* e *Relleu*, em Espanha, e a de *Pontalto*, em Itália, todas datando do século XVI, são outros exemplos de longevidade das barragens arqueadas. Um outro exemplo mais recente, mas que ainda hoje se impõe à admiração geral, pela consciência que o autor do projecto teve da vantagem da solução em abóbada, é o da barragem *Zola*, também de planta curva, construída em França em 1839. Esta barragem tem um perfil nitidamente insuficiente para resistir apenas por peso, e, no entanto, é uma das obras de retenção de um curso de água mais antigas ainda em funcionamento.

É notável o facto de não se conhecer nenhuma rotura de barragens-abóbada. Dentre as roturas de um total de 27 barragens de gravidade apresentadas por JORGERSEN apenas duas eram arqueadas. Nos dois casos em que houve acidentes em encontros de barragens-abóbada — *Lanier* e *Moyei* nos E. U. A., a primeira de 19 m e a segunda de 17 m de altura —

as abóbadas propriamente ditas resistiram sem danos importantes à avalanche da água que se produziu em seguida à rotura dos encontros.

Paralelamente com a incontestável segurança sabe-se também que a adopção de barragem-abóbada representa, em regra, uma economia considerável em relação a outras soluções tradicionais. Em contrapartida o cálculo das barragens-abóbada apresenta, em relação ao cálculo das barragens de outros tipos, numerosas dificuldades que têm levado à adopção de métodos de cálculo baseados em hipóteses mais ou menos discutíveis mas sempre simplificadoras das condições reais de funcionamento dessas estruturas.

Já na época em que a resistência das construções era encarada unicamente através da estática puderam ter lugar, com completo sucesso, algumas realizações de vulto, bastante arrojadas, cujo cálculo foi efectuado apenas pela conhecida fórmula dos tubos:

$$\sigma = p \frac{r}{e},$$

em que

σ — tensão média,

p — pressão da água a montante a uma certa cota,

r e e — raio médio e espessura da abóbada na mesma cota.

Esta fórmula tão simples fornece, incontestavelmente, um valor aproximado da tensão média produzida pela pressão hidrostática numa barragem

* Conferência proferida na Escola Técnica do Exército, no Rio de Janeiro, e no Instituto de Engenharia, em S. Paulo, em Abril e Maio de 1957

abóbada muito delgada num vale comum em V. Nessas condições não admira que esse valor se aproxime do da tensão máxima quando uma parte da pressão hidrostática seja absorvida pelo efeito de consola, como acontece nas barragens-abóbada espessas. Tal fórmula permitiu ainda a JORGENSEN [1915] estabelecer critérios, hoje muito discutíveis, para a escolha das formas mais económicas de barragens-abóbada.

Mas tem ainda outro mérito esta fórmula. Chamou a atenção para a vantagem em reduzir, com a profundidade, o raio de curvatura da superfície média das barragens-abóbada.

Pode dizer-se que, a partir deste momento, as grandes realizações em matéria de barragens têm andado sempre associadas à criação de novos métodos. Quase sempre também, o préstimo desses métodos só depois veio a ser utilizado. Assim, a construção das primeiras grandes barragens-abóbada americanas, tais como as de *Diablo* e de *Pacoima*, determinou um progresso notável nos estudos por arcos independentes que adiante serão referidos. As barragens europeias da mesma época levaram à criação do método de cálculo baseado na igualdade das deformações dos arcos e da consola do fecho e, posteriormente, à criação do método de cálculo por arcos inclinados.

Com a construção da barragem de *Hoover* desenvolveu-se, até às últimas possibilidades, o cálculo pelo método de ajustamento por tentativas, o conhecido método «trial-load». As primeiras grandes realizações suíças, austríacas, alemãs e italianas são já contemporâneas dos métodos baseados na teoria das cascas. O desenvolvimento dum método de cálculo inglês, utilizando os métodos de relaxação para a integração das equações diferenciais, foi consequência do projecto, por uma firma inglesa, duma grande barragem-abóbada no Próximo Oriente, podendo ainda dizer-se que o início da construção das grandes barragens, no após-guerra, na Itália e em Portugal determinaram progressos, ainda não atingidos, na determinação, sobre modelos, das tensões em barragens-abóbada. Afinal este é o único meio até hoje conseguido para achar satisfatoriamente as tensões que se desenvolvem nessas estruturas, independentemente de serem ou não simples as suas formas.

O problema do cálculo das barragens-abóbada pode considerar-se um problema típico para ser resolvido pela Teoria da Elasticidade. Porém, a insuficiência dos instrumentos analíticos tornou, até há pouco, totalmente inoperante essa teoria, quer por virtude da complexidade das formas da estrutura quer das suas condições de fronteira, especialmente, a complexidade analítica de expressão do seu en-

castramento nas margens. Foi a grande experiência inglesa em matéria de métodos de resolução numérica das equações de diferenças resultantes de equações diferenciais, nomeadamente o método de relaxação, que permitiu resolver pela primeira vez, para um caso simples, como adiante se verá, as equações gerais da teoria da elasticidade aplicada ao caso concreto duma barragem-abóbada de paramento cilíndrico e vertical. Na aplicação do método foram, no entanto, gastos cerca de três anos, podendo dizer-se que ele só ainda pode ser aplicado a casos simples de barragens de paramento cilíndrico.

Posta neste pé a complexidade na utilização da Teoria da Elasticidade, resta então o recurso à Resistência dos Materiais, quer através das teorias da flexão das peças lineares quer através da teoria das cascas. Em qualquer caso, o problema só tem apresentado viabilidade de solução prática à custa de dois artificios: o cálculo por aproximações sucessivas e a hipótese de divisão da barragem em elementos, isto ou no início ou então em fase adiantada da análise.

De qualquer modo a resolução do problema da determinação por via analítica das tensões numa barragem-abóbada está ainda hoje em plena evolução. Está-se longe de ter encontrado solução satisfatória e unanimemente aceite, pelo que surgem com grande frequência novas formas de o abordar.

Como em qualquer outro problema da teoria das estruturas, o cálculo das barragens tem de basear-se em hipóteses quer quanto às propriedades mecânicas do betão e da rocha, quer quanto à continuidade e até à forma das estruturas. Não apareceu ainda para as barragens-abóbada qualquer método ou processo de cálculo que abandonasse a lei de Hooke, e as hipóteses básicas da Resistência dos Materiais, tais como a da distribuição linear das tensões, só muito raramente têm sido evitadas. Além disso, no caso das barragens, é necessário fazer muitas considerações quanto ao valor e distribuição das solicitações. As mais importantes tais como o peso próprio, a pressão hidrostática e as variações de temperatura, são bem definidas ou não podem ultrapassar certos limites que é possível calcular. As outras solicitações como as impulsões do gelo, a subpressão e os tremores de terra são em regra pouco importantes, podendo as duas primeiras ser reduzidas a intensidades de pouca monta.

Em seguida são descritos os métodos mais importantes para o cálculo das barragens-abóbada e serão apontadas as suas deficiências.

Considere-se em primeiro lugar um elemento duma barragem-abóbada limitada por duas superfícies verticais normais ao paramento de montante, por duas superfícies horizontais e ainda pelos pró-

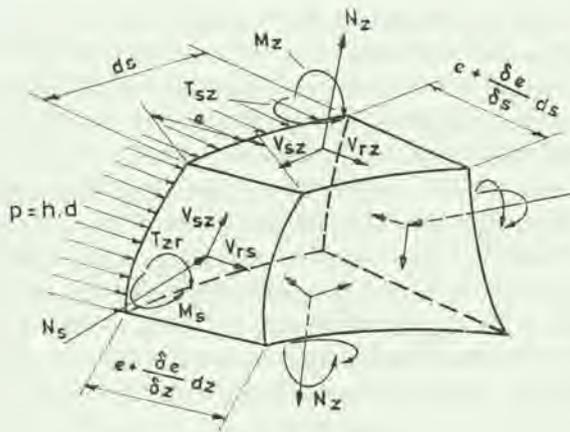


Fig. 1

prios paramentos. Existirão quando a barragem é solicitada, em cada uma dessas superfícies, tensões normais e tangenciais de distribuição variável que se podem compor de modo que se tornem equivalentes aos esforços que se representam na fig. 1, onde NN são os esforços normais, VV esforços transversos, MM momento flectores e TT momentos de torção.

Em síntese, pode dizer-se que é tanto mais correcto o método de cálculo quanto menor o número destes esforços que despreza.

2. MÉTODO DOS ARCOS INDEPENDENTES

Foi muito usado, e continua ainda a usar-se como método de cálculo das barragens-abóbada, o método dos arcos independentes o qual é prescrito obrigatoriamente por certos regulamentos.

Admite-se neste caso que a barragem é constituída por uma série de lâminas horizontais sobrepostas e independentes, isto é, que toda a pressão hidrostática é suportada por arcos horizontais.

As primeiras aplicações foram feitas apenas para arcos circulares de espessura uniforme desprezando-se totalmente o esforço transversal V_{rs} no cálculo das incógnitas hiperestáticas (RUFFIEUX [1901], MORSH [1908] e outros).

H. RITTER [1913], CAIN [1922], IPPOLITO [1927], NOETZLI [1924], passaram a considerar no cálculo o efeito desse esforço transversal. M. RITTER [1909 e 1913] e mais recentemente STUCKY, PANCHAUD e SCHNITZLER [1950] tiveram em devida conta no cálculo dos arcos a deformação dos apoios, para cujo estudo, aliás, muito contribuiu o trabalho de F. VOGT [1925]. A teoria foi depois completada passando a considerar-se a influência da espessura do arco e da sua curvatura na distribuição de tensões ao longo da espessura (JAKOBSEN [1927] e CRAVITZ [1935]). Cálculos de arcos baseados na Teoria da Elasticidade e

portanto em hipóteses menos discutíveis que os anteriores, não admitindo pois a distribuição linear das tensões, vieram a ser apresentados por vários autores (CAQUOT [1926], CHAMBAUD [1926], HAEGELEN [1927], COMSTOK [1931], HOFACKER [1936], TREMMEL [1954], etc).

O trabalho de cálculo dos arcos horizontais independentes de espessura constante submetidos a carga uniforme foi bastante facilitado pela apresentação de ábacos, (FOWLER [1928], PIGEAUD (por memória)) o mesmo vindo a acontecer recentemente com o cálculo de arcos de espessura variável, com fibra média circular, submetidos ainda a carga uniforme (PARME [1948] e PERKINS [1952]).

A objecção mais importante a apresentar ao método de cálculo de barragens por arcos horizontais independentes, é de que não tem em conta a continuidade da barragem na vertical, isto é, esse método despreza o efeito do encastramento no fundo do vale e a existência dos esforços normais e transversos e momentos flectores e de torção nas secções horizontais por onde foi cortada a barragem: N_z , V_{rs} , V_{rz} , M_z e T_{sz} , (fig. 1). Como é evidente o método despreza também os esforços de torção e transversos nas próprias secções verticais dos arcos. A barragem perde assim uma grande parte da sua capacidade de resistência, não sendo por isso de estranhar que o método forneça, nos casos correntes de barragens sem singularidades importantes, tensões normais de compressão nas secções verticais bastante superiores às que se produzirão numa estrutura contínua. É isso que se tem verificado em quase todos os casos em que se tem aplicado o método.

É fácil de ver que, no caso de barragens muito pouco espessas e de grande curvatura, construídas em gargantas muito estreitas, o método dos arcos independentes pode conduzir a resultados muito satisfatórios para a zona média da barragem, ao contrário do que acontece nas barragens-abóbada espessas de pequena curvatura a montante, construídas em vales largos, sobretudo para os seus arcos inferiores. Neste caso o funcionamento da estrutura na vertical pode ser muito importante devido à rigidez dos blocos.

De qualquer modo, o método dos arcos independentes nunca pode ter em conta a influência da forma do vale no comportamento da barragem, nem tão pouco o efeito do encastramento normal ao terreno ou o efeito de bordo, muito importante, do coroamento da barragem.

A verificação de que, no caso das barragens-abóbada espessas, os cálculos dos arcos independentes das cotas inferiores conduzia a tensões de tracção muito superiores às que o betão poderia suportar (fig. 2) levou a admitir que no interior

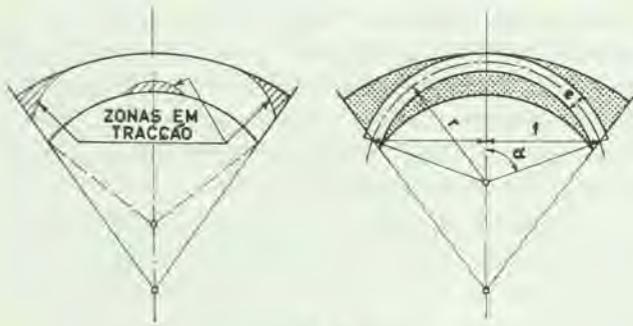


Fig. 2

desses arcos se formavam, devido à rotura das zonas tendidas, elementos activos. Desenvolveu-se assim um método de cálculo chamado de «arcos activos» (RESAL, [1919]), fig. 2, que consiste em calcular as tensões de compressão em arcos circulares, com tensões de tracção nulas, que se inscrevam nas secções horizontais da barragem. Tal método esteve muito em voga na Europa, pois que uma circular ministerial francesa mandava que ele fosse aplicado, obrigatoriamente, às barragens-abóbada.

Um outro método simplificado, o que pretende determinar as tensões pelo cálculo de arcos inclinados, deve-se a A. COYNE [1943] (Vide BOURGIN [1948]). A ideia parece ter nascido da observação do andamento das isostáticas no paramento de jusante das barragens, mas efectivamente, tanto a hipótese da não existência de tensões tangenciais nas superfícies ab e $a'b'$, (fig. 3), como o critério de escolha da inclinação dos planos limites desses arcos, isto é, do ponto D, não têm base teórica aceitável.

Desde há muito que foi procurado traduzir, por uma redução das cargas a aplicar nos arcos independentes, a constatação de que o funcionamento das barragens-abóbada na direcção vertical diminui o efeito de arco. Procurou-se achar essa redução quer através de fórmulas de demonstração discutível (BELLET [1907], GUIDI [1921 e 1927], CAMPINI [1923]) quer à custa da igualização dos deslocamentos da consola central e dos arcos, por divisão da carga

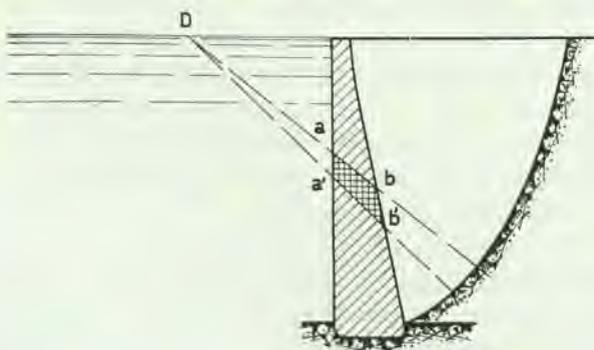


Fig. 3

entre esses elementos. Tal método, que teria, provavelmente, sido aplicado, já em 1889 (VISKER e WAGONER), foi objecto de muitos estudos (HARRISON e WOODGARD [1904], H. RITTER [1913], JORGERSEN [1915], MENSCH [1915] e outros). A divisão das cargas entre os arcos e a consola era obtida ou por tentativas ou por resolução de um sistema de equações.

Como se vê, o método, ainda que mais aperfeiçoado que o cálculo por arcos independentes, admite ainda a constância da carga nos arcos, o que pode conduzir a desvios apreciáveis e também não pode ter em conta possíveis assimetrias da obra. De qualquer forma o método dava já uma primeira aproximação dos valores do momento flector e do esforço transversal em secções horizontais M_x e V_x , (fig. 1) da zona central, mas estava ainda longe de conduzir a uma determinação suficientemente segura e pormenorizada do estado geral de tensão na barragem.

Este método teve a sua evolução natural, que adiante se exporá, passando a considerar um maior número de consolas. Entretanto, vai-se apresentar um outro caminho possível para o cálculo das barragens-abóbada que surgiu sensivelmente na mesma época em que se produziu tal evolução.

3. MÉTODOS BASEADOS NA TEORIA DAS CASCAS

Supõe-se agora que a espessura da abóbada é suficientemente pequena para que se possa considerar desprezível em face dos raios de curvatura da sua superfície média e imagina-se, em primeira aproximação, que essa casca faz parte duma superfície de revolução.

A partir das equações diferenciais de equilíbrio dum elemento dessa casca e das equações de compatibilidade geométrica mais ou menos aprofundadas, obtém-se uma ou mais equações diferenciais às derivadas parciais dos deslocamentos da casca. Com várias simplificações pode-se exprimir o problema apenas por uma equação às derivadas parciais da função deslocamento radial w . Esta equação diferencial, conjuntamente com as condições de fronteira do reservatório cilíndrico completo, forneceu a primeira fase da resolução do problema. Em fases seguintes procurou-se, à custa de novas hipóteses, utilizar os resultados assim obtidos para a solução do problema. Isto é, procurou-se introduzir os efeitos dos encastramentos nas margens, as variações dos raios de curvatura, as variações de espessura, etc. Pode dizer-se que todos os aperfeiçoamentos neste método têm sido procurados à custa da consideração, em fases posteriores dos

cálculos, de elementos arcos e consolas que se acabam por imaginar na casca de revolução inicial.

SMITH [1919] num trabalho, que é o primeiro, segundo se julga, dentro desta linha de raciocínios, partiu da resolução do problema das cascas para o caso dum reservatório cilíndrico de paredes verticais submetido a uma pressão exterior, supondo desprezível a variação do raio da superfície média, isto é, tomando-o igual ao raio do paramento de extradorso. Para ter em consideração as condições de encastramento na margem admitiu que o módulo elástico relativo à resistência longitudinal da estrutura é de apenas 2/3 do seu valor real. Neste tratamento do problema apenas é considerado o esforço normal tangencial N_s , o esforço transverso e o momento flector no plano horizontal, M_z e V_{rz} (fig. 1). Todos os outros esforços são desprezados. É de notar ainda que as condições de contorno foram tomadas com pouco rigor.

Dentro da mesma linha de raciocínio, é notável o estudo de BAZANT [1936] para abóbadas cilíndricas espessas, no qual este autor usou hipóteses já próximas das da Teoria da Elasticidade. O problema foi resolvido com toda a generalidade, também para o caso de reservatórios espessos de paramento exterior cilíndrico e vertical, através da resolução simultânea de duas equações diferenciais de quarta ordem em função dos deslocamentos radiais e verticais. Neste estudo, todavia, não se faz referência explícita ao problema das barragens, em relação ao qual a solução de BAZANT desprezou as tensões tangenciais cujos integrais são os esforços V_{zs} e V_{rs} e os esforços de torsão T_{sz} .

TÖLKE [1938] já tratou o problema das barragens-abóbada com maior generalidade, admitindo a curvatura na vertical duma casca de revolução, tendo em conta as variações do raio da superfície média e fazendo inicialmente poucas hipóteses simplificadoras sobre a equação da flexão da casca. Escreveu a equação diferencial geral:

$$\left[(e^{\beta} w''')'' + 2(e^{\beta} w''')' + e^{\beta} w'''' + \frac{2}{r^2} (e^{\beta} w'')' + \frac{1}{r^2} e^{\beta} w'' \right] + \nu \left[(e^{\beta} w''')'' - 2(e^{\beta} w''')' + e^{\beta} w'''' - \frac{2}{r^2} (e^{\beta} w'')' + \frac{2}{r^2} e^{\beta} w'' \right] = - \frac{12(1-\nu^2)}{E} \left[p_2 + \frac{1}{r} N_s^{s=0} \right] \quad (1)$$

Sendo $\nu = 0$, $N_s = e^{\beta} = N_s^{s=0}$, $N_z = 0$ e $V_{sz} = V_{zs} = 0$ a equação anterior transforma-se em:

$$(e^{\beta} w''')'' + \frac{12(1-\nu^2)}{r^2} e^{\beta} w'' = - \frac{12(1-\nu^2)\delta z}{E} \quad (2)$$

sendo δ o peso específico da água. Desta equação, por integração, obtêm-se os esforços:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} N_s &= \frac{Ee}{r} w'; M_z = - \frac{Ee^{\beta}}{12(1-\nu^2)} w''''; M_s = \nu M_z \\ V_{rz} = M_z' &= \frac{Ee^{\beta}}{12(1-\nu^2)} \left[w'''' + \frac{3e^{\beta}}{e} w''' \right]; V_{rs} = 0 \end{aligned} \right.$$

Nestas equações "" são derivadas em ordem a z e "" em ordem a s , p_2 a parte da carga suportada pelo efeito de casca ($p = p_1 + p_2$ sendo p_1 a parte da carga suportada pelo efeito de membrana). Nessas equações TÖLKE teve em conta os momentos torsores e esforços transversos tangenciais, e desprezou apenas o esforço normal vertical N_z , o esforço transverso vertical V_{zs} e as influências da curvatura e do coeficiente de Poisson, (cortando o 2.º termo do 1.º membro e os termos em $\frac{1}{r^2}$). Mostrou ainda este autor a possibilidade de serem utilizadas séries de Fourier para a integração dessas equações.

Porém só tratou, formalmente, com aspectos práticos, o caso dos reservatórios cilíndricos de perfil triangular, trapezoidal e hiperbólico encastrados no fundo do vale para os quais a equação de flexão das cascas toma então formas simples, o que torna possível obter integrações formais.

Uma vez integrada a equação da casca para o caso do reservatório cilíndrico em que $p_2 = p = \delta z$ e feitas outras hipóteses simplificadoras (equação 2), isto é, uma vez calculados os deslocamentos radiais w , TÖLKE passa ao cálculo dos esforços no paralelo e no meridiano segundo as expressões (3). As tensões na consola central ficam desde logo calculadas. Quanto aos arcos, a partir da tensão no paralelo, determina a parte da carga radial que lhes corresponde, para a qual passa então ao cálculo dos verdadeiros arcos da barragem. Deve dizer-se, a este respeito, que o tratamento que TÖLKE dá ao cálculo dos arcos de espessura variável é bastante interessante. Todavia, ao seu método de cálculo podem-se apresentar várias objecções, algumas das quais iremos referir adiante. Note-se ainda que TÖLKE considerou tanto a influência da elasticidade da rocha de fundação, à custa dum aumento da barragem para além da superfície de fundação, como as variações uniformes de temperatura.

Vários autores italianos, como ARREDI [1944], GALLI [1948], BÉRIO [1950], KRALL [1951] e outros, têm procurado completar o trabalho de TÖLKE à custa de novas correcções à solução obtida.

ARREDI [1944] considerou apenas o caso das barragens de paramento de montante cilíndrico e vertical com espessura uniforme. Seguindo um tratamento análogo ao de TÖLKE obteve o integral geral da equação da flexão das cascas à custa de funções de Michell. Procurou entrar com o efeito das margens fazendo considerações sobre a divisão de cargas entre arcos e consolas, o que conduziu a um estudo já bastante complexo. Recentemente [1955] este autor apresentou uma nova contribuição ao seu trabalho com bastante interesse.

KRALI [1951], seguindo um procedimento um pouco diferente do ponto de vista formal do de TÖLKE, começa por imaginar, numa primeira fase, uma cúpula de revolução completa resistindo às pressões exteriores, sem quaisquer ligações ao vale, apenas por esforços de membrana. Numa segunda fase são calculados os esforços nos arcos da porção de cúpula correspondente à barragem de modo que leve a superfície dos encontros à sua posição antes de deformada. Numa terceira fase corrige esses esforços considerando que, junto das nascenças, existe uma pressão fictícia que modifica a carga uniforme nos arcos.

Numa outra memória sobre o assunto, da autoria de DAVIN [1947], apenas se consegue determinar o equilíbrio de membrana, isto é, desprezam-se momentos flectores e torsões e esforços transversos radiais, o que constitui demasiada simplificação.

RESCHER [1951] utilizou também a equação geral das cascas finas flectidas tendo aplicado na sua resolução os métodos de relaxação. Note-se que SIGNORINI [1945] tentou estabelecer uma teoria mais exacta das barragens de dupla curvatura.

Como se vê todos estes autores não vão, rigorosamente, além da determinação das tensões normais nos arcos e na consola central não obtendo assim elementos que permitam o cálculo das tensões principais máximas.

BÉRIO [1950] fez já um estudo aprofundado das várias simplificações introduzidas pela aplicação da teoria das cascas de revolução obtendo elementos correctivos para essas simplificações. Ao analisar o efeito da grande espessura das barragens em face do raio conclui que a hipótese da distribuição linear das tensões, ainda que conduzindo a valores por excesso, é aceitável. Escreve em seguida uma equação diferencial, análoga à de TÖLKE, da flexão numa casca de dupla curvatura de revolução (1), em que já introduz o esforço normal na consola vertical, para a qual propõe a integração por diferenças finitas. Uma vez calculada, ainda do mesmo modo, a carga uniforme nos arcos e a distribuição de carga na consola

central, retoma a concepção de GUIDI [1927] da distribuição parabólica das cargas nos arcos. Considerando então a barragem constituída por arcos e consolas e conhecendo os coeficientes da deformação dos arcos para cargas unitárias, escreve uma nova equação diferencial de quarta ordem, integrável por diferenças finitas, com a qual obtém uma curva elástica deformada da consola central diferente da do reservatório completo e que fornecerá em princípio melhor aproximação. Como a partir dos resultados de ensaios de modelos sabe que os esforços transversos tangenciais V_s , tem uma distribuição praticamente linear numa a outra margem, obtém um meio de calcular, aproximadamente, esses esforços e assim as tensões principais em qualquer ponto da barragem. Faz, em seguida, uma teoria aproximada das barragens arco não constituídas por sólidos de revolução escrevendo novas equações diferenciais cuja aplicação vai corrigindo da forma anteriormente indicada. Como é claro, em todo este estudo, falta considerar o efeito dos momentos torsões TT e os efeitos da espessura da abóbada.

O tratamento mais completo que até hoje foi dado ao cálculo numa barragem pela teoria das cascas deve-se a WESTERGAARD [1928] que procurou analisar por esse meio as tensões na barragem experimental de *Stevenson Creek*. Nessa sua análise não desprezou nenhum dos esforços importantes chegando assim, pelas condições de equilíbrio e de compatibilidade, às duas equações diferenciais de quarta ordem, uma dos deslocamentos (*equação da flexão*)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2 \partial z} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{\nu}{r^2} w \right) - \frac{1}{N} \left(\delta - \frac{N_s}{r} + N_z r'' + \delta_b e r' \right) = 0 \quad (4)$$

em que

$$K = \frac{2N'}{N}, k = \frac{N''}{N}, N = \frac{E e^3}{12(1-\nu^2)}, N' = \frac{dN}{dz}, N'' = \frac{d^2N}{dz^2},$$

δ - peso específico da água,

δ_b - peso específico do betão,

outra duma função de tensões (*equação das forças centrais, ou de continuidade geométrica*), deduzida das relações entre tensões e deslocamentos

$$\frac{\partial^4 F}{\partial s^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial s^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} - \frac{E \epsilon \partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (5)$$

sendo

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = N_s; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \epsilon_b \int_0^{sz} c dz = N_s; \quad \epsilon - \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial z} = V_{sz}.$$

Claro está que tais equações só são válidas para uma barragem com as formas da de *Stevenson Creek*.

Para simplificar esta última equação admitiu WESTGAARD que

$N_s = N = c^z$ para cada valor de z (sabe-se hoje que tal hipótese se afasta muito da realidade) e

$V_{sz} = 0$ e $N_z =$ esforço normal provocado apenas pelo peso próprio.

Põe então as condições de fronteira no coroa-mento

$N_z = V_{sz} = M_z = 0$, mais a condição de Tait e Tompson:

$$R_z = 0 = V_{rz} + \frac{T_{sz}}{s}$$

Para atender às condições de deformabilidade das margens partiu das expressões de VOGT o que o levou a aumentar o desenvolvimento da abóbada.

Para a resolução do seu problema (e note-se que o caso em questão era muito simples em virtude da simplicidade do traçado da barragem) usou funções ortogonais convenientemente escolhidas com as quais obteve soluções para a equação da flexão das cascas. Para confirmar essa escolha baseou-se nos diagramas das deformadas obtidas nos ensaios em modelo. Procedendo depois a um cálculo por integração numérica, bastante complexo, chegou à conclusão de que o «comportamento geral da barragem de *Stevenson Creek* podia ser obtido a partir da teoria da flexão de uma casca elástica».

Como se vê, não foi até hoje ainda encontrada uma solução exacta a partir da teoria das cascas. A solução aproximada conseguida por WESTERGAARD para o caso duma barragem extremamente simples tem uma extensão e complexidade de cálculos tais que tem levado a pôr de lado a ideia de a aplicar

a qualquer outra obra. Note-se que essa solução não segue raciocínios simples o que torna difícil a intuição da justeza das diferentes etapas da resolução.

Em todas as outras soluções além das de WESTERGAARD pretende-se efectuar o cálculo das barragens-abóbada a partir da integração duma equação diferencial de flexão das cascas mais ou menos simplificada para o caso de um reservatório completo. Tudo leva a crer que o ajustamento dos deslocamentos do fecho dos arcos com o de uma consola central levará a um resultado idêntico por um processo mais rápido, mais intuitivo e muito mais simples.

Viu-se que TÖLKE e muitos outros desprezaram completamente o efeito das margens e que KRALL, ARREDI e BÉRIO já o tiveram em consideração, todavia à custa de cálculos tão extensos que ficam dúvidas sobre se são compensadores em face das hipóteses feitas. Com efeito, a hipótese em que se supõe que a barragem faz parte duma casca de revolução é fácil de criticar porque:

a) as espessuras da barragem não são em geral desprezíveis em face dos respectivos raios de curvatura,

b) as espessuras das secções horizontais normalmente não são uniformes e

c) os centros das curvas de nível dos paramentos de montante e de jusante nunca estão na mesma vertical. A tendência actual, como se verá, é mesmo para o abandono de arcos circulares.

Quanto à hipótese de que a tensão normal média nos paralelos é aproximadamente igual à tensão média nos arcos da barragem, pode acontecer, sobretudo nas barragens com consolas laterais de pequena altura em vales em V, que isso se não verifique de todo nas regiões dos arcos próximo dos encontros. Muitas outras hipóteses são discutíveis e até arbitrárias, por exemplo a não consideração do efeito total do coeficiente de Poisson, dos deslocamentos verticais, etc., mas levaria muito tempo a fazer uma crítica completa de cada um deles.

4. MÉTODOS BASEADOS NA DIVISÃO DA BARRAGEM EM DOIS SISTEMAS DE ELEMENTOS CRUZADOS

Consistem estes métodos, na forma mais simples, essencialmente no seguinte: imagina-se a barragem dividida em dois sistemas de elementos de espessura unitária, um sistema de elementos horizontais, os arcos, e um sistema de elementos verticais, radiais, as consolas. Divide-se a pressão hidrostática entre

esses elementos de modo tal que os deslocamentos radiais dos arcos sejam iguais aos deslocamentos radiais das consolas nos seus pontos de intersecção. Essa divisão de cargas obtem-se, em geral, por tentativas de ajustamento, mas ultimamente têm-se conseguido desenvolver processos para efectuar essa divisão da carga por resolução de um sistema de equações. Adiante será referido este assunto.

Esta ideia parece ter sido usada pela primeira vez por A. ROHN na Suíça, a cujo trabalho se seguiram o de STUCKY [1922] que realizou por tentativas o ajustamento e o de JULLARD [1921] que propôs a utilização de linhas de influência para facilitar os cálculos. Nos E. U. A., HOWELL e JAQUITH [1929] desenvolveram, independentemente, o método, usando tentativas de composições de cargas a partir de cargas unitárias até se conseguir o ajustamento.

Note-se que, por volta de 1930, foram projectadas três barragens em Espanha sendo usado este método.

A necessidade de um método mais rigoroso e compreensível para o cálculo das grandes barragens-abóbada levou o Bureau of Reclamation, em continuação dum trabalho nacional notabilíssimo concretizado pela Comissão do «Arch Dam Investigation» (Engineering Foundation 1927 e 1928), a desenvolver a ideia do método dos ajustamentos, introduzindo-lhe grande número de aperfeiçoamentos, entre eles, e como mais importantes, os ajustamentos doutros deslocamentos. Como é fácil de ver, os deslocamentos dum ponto da barragem têm uma componente vertical, uma radial e uma tangencial, havendo além disso rotações que se podem decompor numa componente de eixo radial, outra de eixo tangencial e outra de eixo vertical. Os ajustamentos considerados no método tal como foi desenvolvido foi o radial, o tangencial e o de torsão de eixo vertical.

WESTERGAARD [1931] contribuiu com ideias sobre a maneira de efectuar os ajustamentos tangenciais e de torsão, chamando a atenção para certas condições de fronteira peculiares que existem no topo de uma barragem; F. VOGT desenvolveu as suas já citadas fórmulas para o cálculo da deformação das fundações; LIEURANCE, KIRN e DEXTER organizaram quadros de cálculos de modo que tornem simples as operações. HOWELL fez várias aplicações e discussões do método e GLOVER sobressaiu entre outros, com uma demonstração da univocidade da solução dada pelo método e com o cálculo de integrais relativos às cargas unitárias em arcos circulares, em que foram considerados não só o efeito do momento flector mas também os efeitos do esforço normal, e do esforço transversal nos deslocamentos produzidos por essas cargas. Ficou assim extremamente

facilitado o cálculo das incógnitas hiperestáticas nos arcos e seus deslocamentos radiais, tangenciais e de torsão. O método recebeu o nome de «trial-load» [1938] e sobre ele e suas aplicações foram apresentadas várias publicações do Bureau of Reclamation.

Este novo método constituía, até há pouco tempo, o passo mais importante dos que foram dados em matéria de cálculo de barragens, sendo o resultado do trabalho de colaboração dum enorme grupo de especialistas. Foram calculadas extensas tabelas dos integrais que resolvem completamente e com toda a precisão arcos circulares de espessura uniforme submetidos a cargas radiais, tangenciais e de torsão, triangulares unitárias e concentradas nas nascenças e ainda a variação de temperatura. Foram desenvolvidas fórmulas que permitem, a partir dessas tabelas, calcular arcos de intradorso e extradorso circular de espessura variável, arcos de tres centros no intradorso e arcos de tres centros tanto no intradorso como no extradorso. Foram desenvolvidas tabelas, ábacos e processos de cálculo expeditos para calcular os efeitos da deformação das fundações. Foram desenvolvidos processos de cálculo adequados para consolas de lados radiais e apresentadas fórmulas apropriadas para o cálculo final das tensões principais na barragem, etc.

Em princípio, qualquer barragem contínua pode ser calculada pelo método «trial-load»; a única limitação é o tempo e o trabalho que é necessário para realizar uma análise completa, o que se pode tornar completamente incomportável se a barragem for assimétrica, tiver uma fundação irregular e arcos de formas diferentes das formas circulares simples. Além disso, pode mesmo não dar resultados aceitáveis em regiões singulares das barragens, como aberturas, juntas abertas, encontros artificiais, etc. Voltando à fig. 1 pode dizer-se que, em princípio, o método calcula todos os esforços nela representados.

O método «trial-load» completo permite então ter em conta a parte mais importante das condições de resistência duma barragem-abóbada. Vejamos então quais as hipóteses fundamentais desse método e como se procede para chegar ao resultado final.

Imagina-se em primeiro lugar que os arcos e as consolas se podem mover independentemente uns dos outros (fig. 4) mas, no fim do cálculo, deve estar restabelecida a continuidade geométrica entre todos os pontos da estrutura, isto é, os arcos e as consolas devem ter deslocamentos lineares (com 3 componentes) e angulares (com 3 componentes) iguais nos seus pontos comuns, de modo que a rede contínua de arcos e consolas ocupe a posição que terá a barragem depois de carregada. Todavia, como os arcos e as consolas fazem parte dum único sólido,

AJUSTAMENTOS REALIZADOS

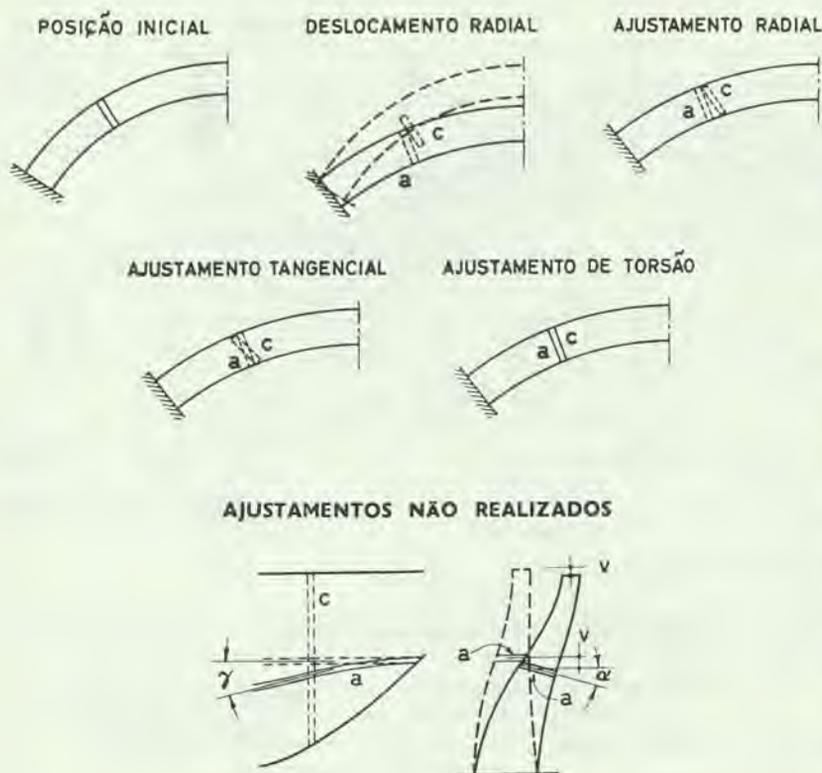


Fig. 4

deverão fazer-se algumas restrições na natureza dos seus movimentos. Por exemplo o deslocamento tangencial das consolas só pode fazer-se por distorsão devida ao esforço transversal e nunca por flexão.

Quanto maior for o número de elementos considerados no cálculo, tanto maior é o rigor dos resultados.

A completa congruência, entre os arcos e consolas em todos os pontos da barragem, é substituída, na estrutura simplificada, pela coincidência dos arcos e consolas nos seus pontos de intersecção. É claro que tal coincidência só é obtida quando houver igualdade das três componentes (radial, tangencial e vertical) do deslocamento linear e das três componentes do deslocamento angular (rotações de eixo radial, tangencial e vertical). O método «trial-load», na sua forma mais completa, só realiza ajustamentos de três daquelas componentes: as componentes radiais e tangenciais dos deslocamentos lineares e a componente de eixo vertical dos deslocamentos angulares, que são as mais importantes, sem dúvida. Os ajustamentos das componentes tangenciais e das rotações são feitas à custa da aplicação de cargas iguais e opostas nos arcos e nas consolas de modo que seja nula a sua resultante. Prova-se que uma vez efectuados aqueles três ajustamentos ficam também ajustadas as componentes tangenciais dos deslocamentos angulares. Não se considera

porém provado, ao contrário do que diz GLOVER [1956], que fiquem também ajustadas as componentes verticais e as angulares radiais. Estas são desprezadas no método.

Das componentes desprezadas, é a componente vertical do deslocamento linear a mais importante. No entanto, como a barragem é constituída por blocos, o deslocamento vertical devido ao peso próprio pode ser desprezado e, portanto, ficam apenas como causas mais importantes dos deslocamentos verticais, as variações anuais de temperatura, o coeficiente de Poisson, a fluência do betão e a eventual curvatura da barragem na vertical. Estudos em modelo das barragens-abóbada portuguesas têm levado à conclusão que esta última causa pode traduzir-se em valores sensíveis do esforço normal vertical N_z .

De qualquer modo, usando este método de cálculo determinam-se esforços suficientes para calcular as tensões principais nos dois paramentos da barragem ou mesmo em pontos do seu interior. Deve notar-se que o método fornece soluções tanto mais aproximadas quanto maior o número de elementos considerados e quanto mais longe se levar o rigor dos ajustamentos.

Houve ocasião de aplicar este método completo ao estudo de uma das soluções da barragem do *Cabril*. Ainda que na aplicação referida se tivesse usado apenas um pequeno número de elementos, fig. 5, puderam-se apreciar as dificuldades e o tempo necessário a uma aplicação do método «trial-load» completo. A comparação dessa dificuldade e desse tempo e ainda dos resultados obtidos por esse método com os ensaios de modelo, mostram decisivamente que o método experimental é mais expedito e mais preciso que o método «trial-load» completo. Os melhores especialistas actuais no cálculo «trial-load» indicaram há pouco tempo (FRED HOUK [1957]) que um cálculo completo, com grupos muito bem treinados, pode levar 400 homens-dia no caso duma barragem vulgar.

Dados a grande extensão de cálculos e o longo tempo necessário para uma aplicação completa, o próprio Bureau of Reclamation desenvolveu um método simplificado em que só são feitos ajustamentos de deslocamentos radiais. Nesse caso já se não podem ter em consideração os esforços T_{xz} , T_{zx} e V_{xz} e, portanto, os efeitos das encostas não podem ser

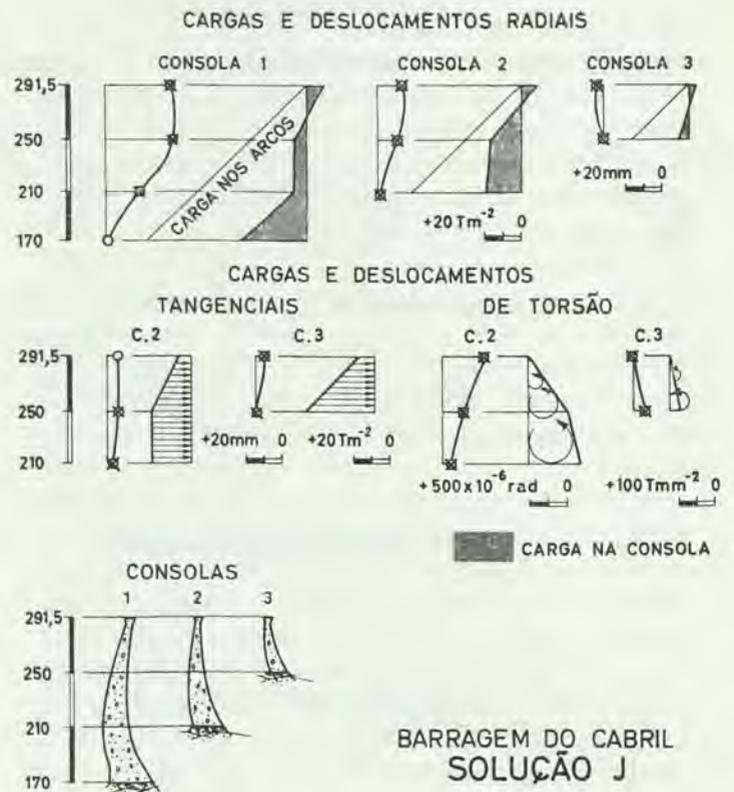
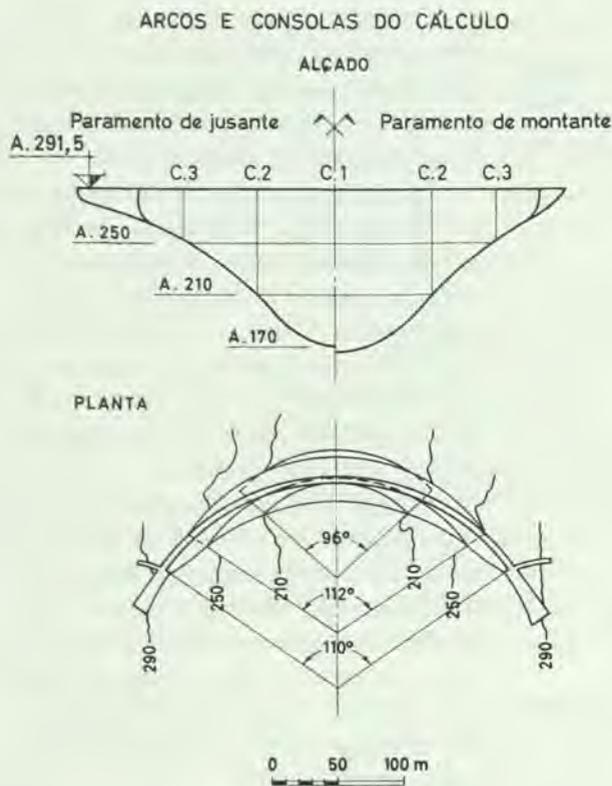


Fig. 5

tidos devidamente em conta. Neste método do Bureau of Reclamation os ajustamentos são feitos também por tentativas a partir de tabelas de cargas unitárias. A fig. 6 mostra o resultado da aplicação deste método ao cálculo da solução definitiva da barragem do *Cabril*.

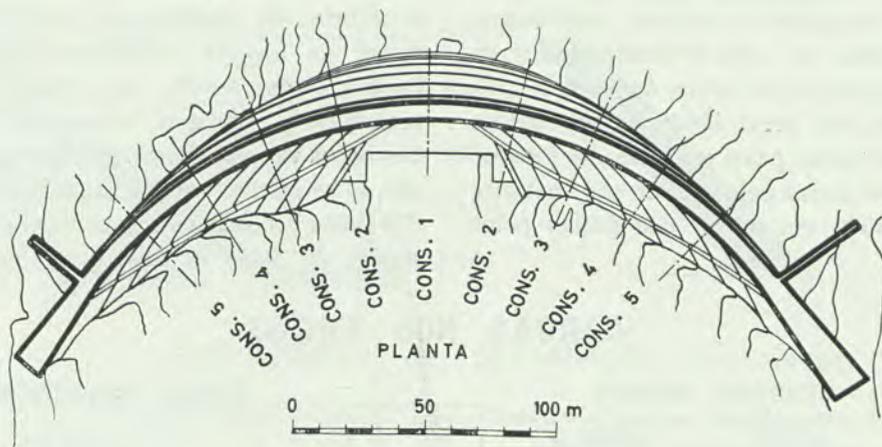
TONINI [1941], a quem se deveu uma vulgarização do método «trial-load» em Itália, resolveu [1950 e 1955] por equações o problema dos ajustamentos dos deslocamentos radiais sem modificar as formas das cargas dadas pelo Bureau of Reclamation. Tal procedimento, se é que tem a vantagem de poder utilizar as esplêndidas tabelas apresentadas nas publicações deste organismo, dá no entanto origem a sistemas complicados de equações pois que as formas das cargas dos arcos tabelados pelo Bureau of Reclamation são sempre as mesmas e não podem por isso ter em conta a posição das consolas (fig. 7).

Recentemente BOSSHARD [1949] apresentou um método semelhante ao «trial-load» simplificado, no qual a distribuição das cargas radiais é obtida directamente por resolução dum sistema de equações dos deslocamentos radiais dos arcos e das consolas nos vários pontos de cruzamento, uma vez conhecidos os deslocamentos radiais produzidos por cargas unitárias que variam com a abertura do arco e com a posição das consolas.

O método de BOSSHARD apresenta então a vantagem da divisão das cargas radiais ser obtida directamente. Porém como as cargas unitárias que o autor considera são diferentes de caso para caso, não é possível calcular tabelas que facilitem a sua aplicação. Por outro lado, por qualquer dos dois processos, despreza-se uma parte da rigidez da estrutura; referimo-nos à resistência ao esforço transversal horizontal e à torsão tanto dos arcos como das consolas. Deste modo, só por ajustamentos de deslocamentos radiais não é possível calcular as direcções principais, sendo lógico concluir que as tensões normais nos arcos e nas consolas são superiores às que se produzirão na estrutura contínua. É isso aliás que se verifica na comparação entre resultados de cálculos «trial-load» completos e de cálculos só com ajustamentos radiais, ou destes com os resultados de ensaios de modelos.

Existe em Portugal bastante experiência no cálculo de barragens pelo método «trial-load» simplificado, isto é, só com ajustamento de deslocamentos radiais, podendo dizer-se que tal método tem sido de muita utilidade em fase de anteprojecto das nossas principais obras, isto é, antes de se proceder ao estudo final por ensaios de modelos. Tal experiência tem permitido fazer interessantes comparações das quais se têm tirado (vide ROCHA, SE-

RESUMO DO CÁLCULO DA BARRAGEM DO CABRIL (N.M. 295.00)



CARGAS CONSIDERADAS

Pressão hidrostática — Correspondente ao nível máximo extraordinário.

Peso próprio — Actua só nas consolas, pois a injeção das juntas realiza-se no fim da construção da barragem.

Sub-pressão — Actua sobre a superfície total da base das consolas, com um diagrama triangular cuja ordenada máxima é igual ao valor da pressão hidrostática.

Temperatura — Adoptam-se, para cada nível, os valores médios do abaixamento de temperatura, que correspondem às condições mais desfavoráveis.

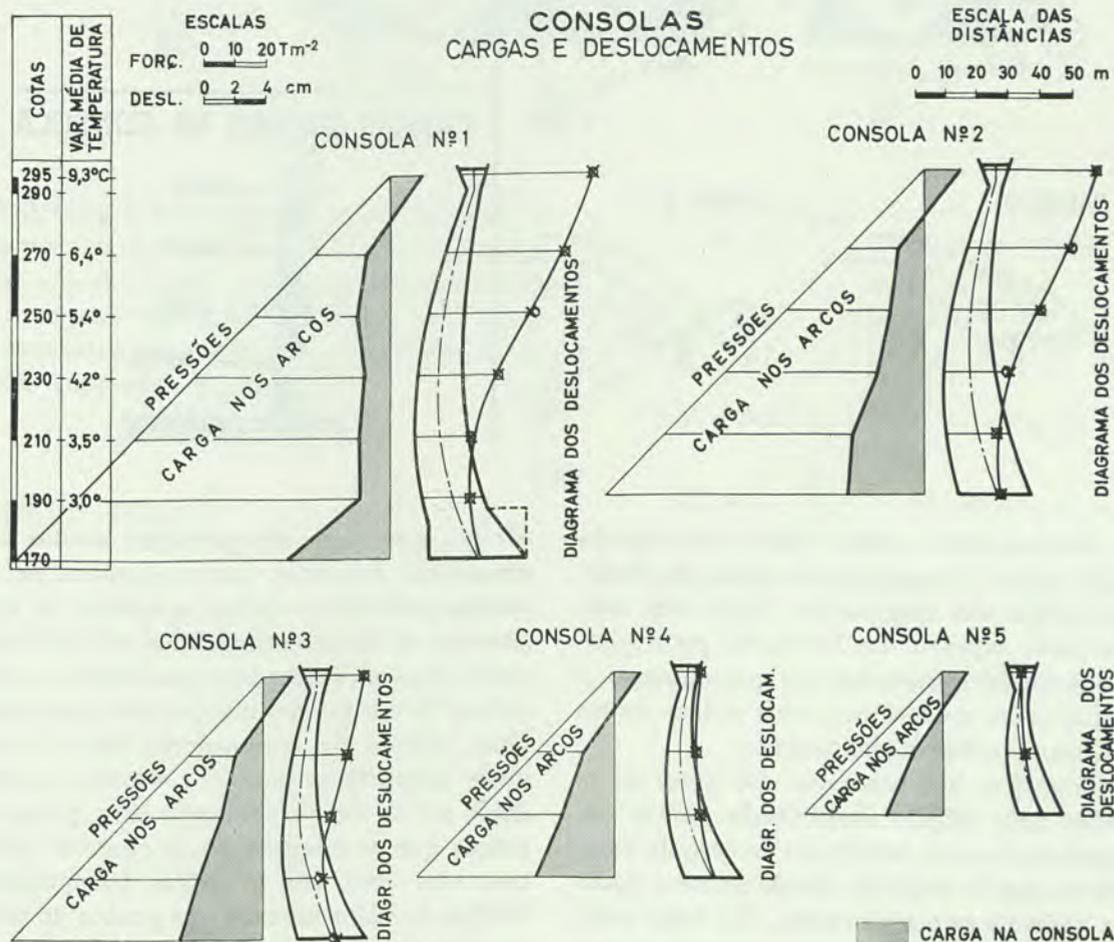


Fig. 6

RAFIM, SILVEIRA e NETO [1956]) algumas conclusões interessantes como, por exemplo as seguintes:

a) No caso de barragens simétricas, sem singularidades, implantadas em vales de perfil regular, as tensões normais máximas nos arcos dadas pelo cálculo «trial-load» são, em geral, idênticas às tensões principais máximas dadas pelos modelos. As tensões na base das consolas dadas pelo cálculo são bastante superiores (20 a 30% em geral) das dadas pelos modelos.

Recentemente, reconhecendo em face dos resultados de cálculo, estudos de modelos e estudos de equilíbrios de membranas, a vantagem em abandonar as formas tradicionais dos arcos, isto é, formas circulares de um centro a montante, têm começado a aparecer formas em que a curvatura dos arcos decresce para as nascenças. Tal tendência não só se iniciou em Portugal (barragens do *Alvito*, *Chicamba* e *Odeáxere*), mas também na Itália (barragem de *Reno di Lei*) e na Suíça (barragem de

CARGAS NOS ARCOS

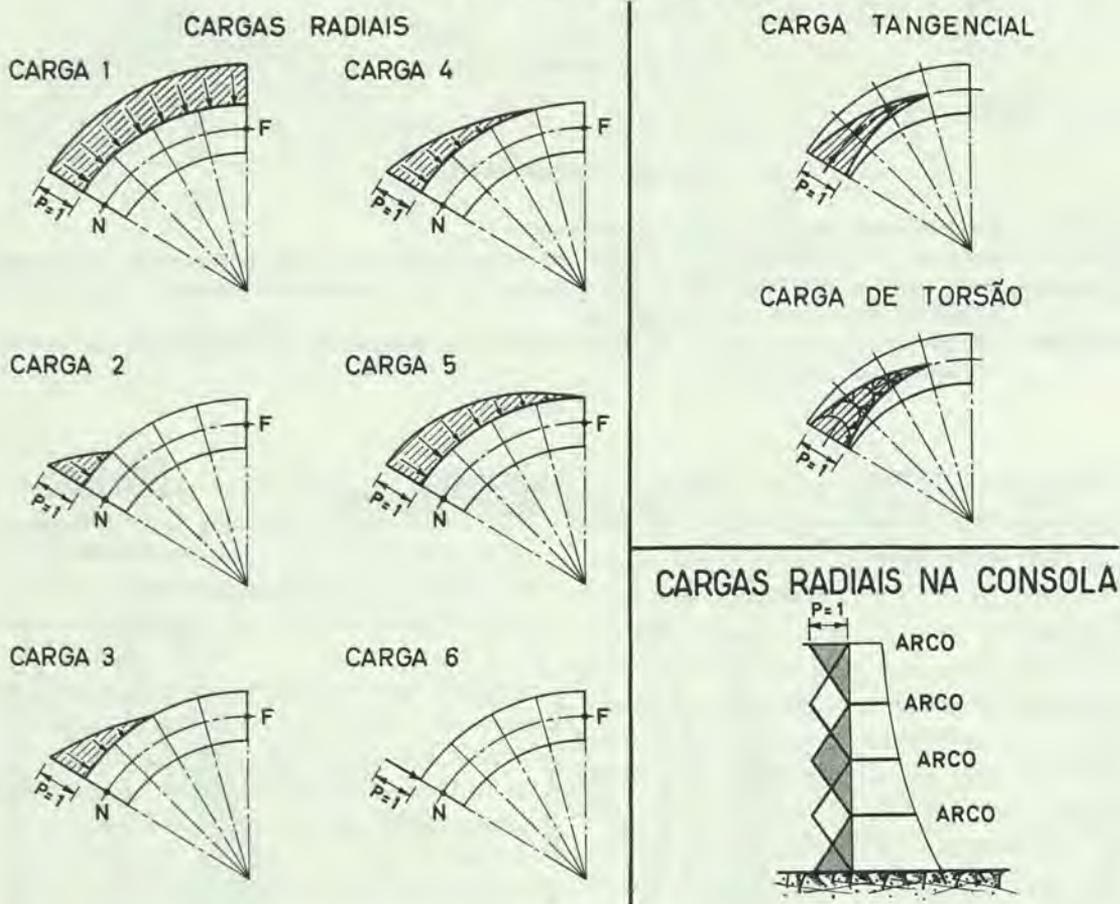


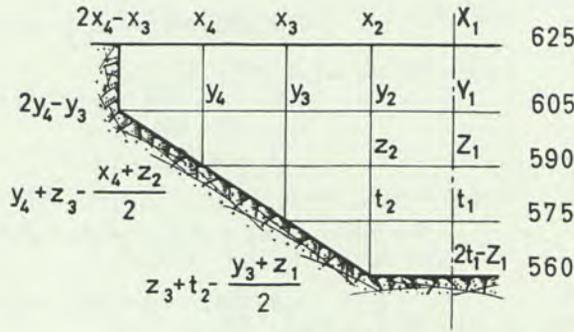
Fig. 7

b) Os deslocamentos radiais dados pelo cálculo simplificado, isto é, só com ajustamentos de deslocamentos radiais são exagerados. Junto das nascenças da parte superior das barragens podem encontrar-se fortes discrepâncias em percentagem e até em sinal entre os deslocamentos radiais dados por tal cálculo e os dados por modelos.

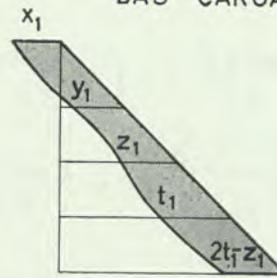
c) As impulsões nas nascenças dos arcos superiores dadas pelo cálculo simplificado podem ser muito superiores às reais, sobretudo no caso de vales V abertos em que o efeito de torção sobre a parte lateral da abóbada seja importante. Tal facto pode conduzir a cálculos muito pouco económicos dos encontros artificiais.

Moiry). Nos casos em que sejam usados arcos com extradorso formados por segmentos de circunferências pode ainda usar-se as tabelas do «trial-load» (Bureau of Reclamation), mas no caso em que se usem arcos não circulares (parabólicos, elípticos ou outros) já tais tabelas não prestam qualquer auxílio. Num cálculo de anteprojecto duma barragem de arcos parabólicos para a *Chicamba* considerou-se então ser de toda a vantagem usar, para cada arco, cargas que se adaptassem às consolas que cruzam com esse arco, isto é, cargas triangulares com o vértice do valor máximo nos pontos de cruzamento do arco com cada consola e os dois vértices de valor nulo nos pontos de cruzamento com as consolas vi-

CARGAS NOS ARCOS



DESIGNAÇÃO E GRANDEZA DAS CARGAS



COEFICIENTES DE DEFORMAÇÃO DOS ARCOS

PONTOS	ARCO 625 x	ARCO 605 y	ARCO 590 z	ARCO 575 t
FECHO 1	a ₁	b ₁	c ₁	d ₁
2	a ₂	b ₂	c ₂	d ₂
3	a ₃	b ₃	c ₃	—
4	a ₄	b ₄	—	—
NASC. 5	a ₅	b ₅	c _N	d _N

Estes coeficientes são afectados dum índice anterior que designa o número da carga.

a₁ - Significa deformação no fecho (ponto 1) do arco 625 para a carga 1.

O índice 0 significa deformação devido à temperatura e o índice 6 indica deformação devido à carga concentrada na nascença.

DESIGNAÇÃO DAS CARGAS

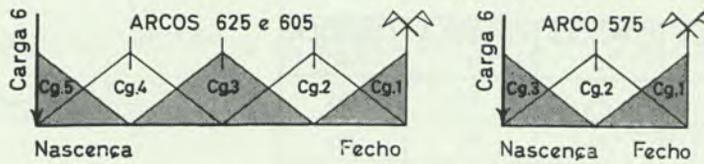


Fig. 8

zinhas. Tal teria a vantagem de poder resolver o problema por um sistema de equações fácil de estabelecer. O cálculo, tanto das incógnitas hiperestáticas do arco para cada carga — M_o , H_o e V_o —, como dos deslocamentos radiais de qualquer ponto faz-se ainda pelas expressões seguintes ¹⁹:

$$M_o = (D_1 B_3 - D_3 B_1) \frac{1}{K},$$

$$H_o = (-D_1 B_1 + D_3 A_1) \frac{1}{K},$$

$$V_o = 0,$$

em que

$$K = A_1 B_3 - B_1^2,$$

$$A_1 = \int_0^s \frac{ds}{EI} + \alpha,$$

$$B_1 = \int_0^s \frac{y ds}{EI} + \alpha y_N + \alpha_2 \text{sen } \phi_N,$$

$$B_3 = \int_0^s \frac{y^2 ds}{EI} + \int_0^s \frac{\cos^2 \phi ds}{EA} + 3 \int_0^s \frac{\text{sen}^2 \phi ds}{EA} + \alpha y_N^2 + \beta \cos^2 \phi_N + \gamma \text{sen}^2 \phi_N + 2 \alpha_2 y_N \text{sen } \phi_N,$$

$$D_1 = \int_0^s \frac{M_L ds}{EI} \cdot H + M_N \alpha + B_N \alpha_2,$$

$$D_3 = \int_0^s \frac{M_L y ds}{EI} - \int_0^s \frac{H_L \cos \phi ds}{EA} + 3 \int_0^s \frac{B_L \text{sen } \phi ds}{EA} + M_N \alpha y_N + B_N \gamma \text{sen } \phi_N - H_N \beta \cos \phi_N + M_N \alpha_2 \text{sen } \phi_N + B_N \alpha_2 y_N,$$

$$\Delta r = -D_2 + C_1 M + B_2 H + C_2 V + (M_N \alpha + V_N \alpha_2) x - H_N \beta \text{sen } \phi_N + (V_N \gamma + M_N \alpha_2) \cos \phi,$$

$$C_1 = \int_0^s \frac{x ds}{EI},$$

$$B_2 = \int_0^s \frac{xy \, ds}{EI} + 2 \int_0^s \frac{\text{sen } \phi \cos \phi \, ds}{EA},$$

$$C_2 = \int_0^s \frac{x^2 \, ds}{EI} + \int_0^s \frac{\text{sen}^2 \phi \, ds}{EA} + 3 \int_0^s \frac{\cos \phi \, ds}{EA},$$

$$D_2 = \int_0^s \frac{M_L x \, ds}{EI} + \int_0^s \frac{H_L \text{sen } \phi \, ds}{EA} + 3 \int_0^s \frac{V_L \cos \phi \, ds}{EA},$$

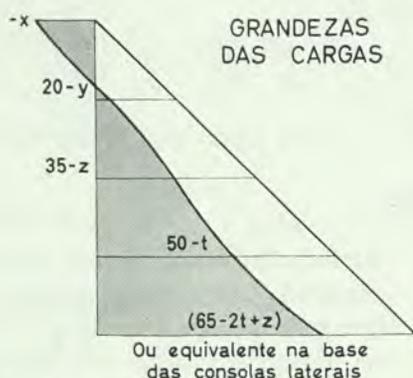
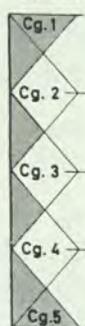
Os valores dos momentos isostáticos e outros elementos necessários para o cálculo foram obtidos a partir dum desenho rigoroso dos arcos e os integrais foram efectuados por somas de diferenças finitas dividindo os arcos num certo número de aduelas.

Na fig. 8 estão indicadas a distribuição de arcos e consolas considerada nesse caso e também as cargas dos arcos e sua numeração bem como as designações dos coeficientes das deformações radiais nos vários pontos.

COEFICIENTES DE DEFORMAÇÃO DAS CONSOLAS

	CONSOLA 1	CONSOLA 2	CONSOLA 3	CONSOLA 4
COTA 625	h_x	k_x	l_x	m_x
COTA 605	h_y	k_y	l_y	m_y
COTA 590	h_z	k_z	l_z	m_f
COTA 575	h_t	k_t	l_f	—
COTA 560	h_f	k_f	—	—

DEFINIÇÃO DAS CARGAS



Os esforços transversos na base das consolas designam-se por $\{V$. O índice inferior designa o número da carga e o superior o número da consola.

Fig. 9

Na fig. 9 estão indicados idênticos elementos em relação às consolas.

Em seguida indica-se o sistema de equação a que se chegou.

$$1. \text{ Fecho} - 625: \quad {}_0a_1\Delta T + {}_1a_1x_1 + {}_2a_1x_2 + {}_3a_1x_3 + {}_4a_1x_4 + {}_5a_1(2x_4 - x_3) = {}_1h_x(-x_1) + {}_2h_x(20 - y_1) + {}_3h_x(35 - z_1) + {}_4h_x(50 - t_1) + {}_5h_x(65 - 2t_1 + z_1)$$

$$2 - 625: \quad {}_0a_2\Delta T + {}_1a_2x_1 + {}_2a_2x_2 + {}_3a_2x_3 + {}_4a_2x_4 + {}_5a_2(2x_4 - x_3) = {}_1k_x(-x_2) + {}_2k_x(20 - y_2) + {}_3k_x(35 - z_2) + {}_4k_x(50 - t_2) + {}_5k_x(65 - 2t_2 + z_2)$$

$$3 - 625: \quad {}_0a_3\Delta T + {}_1a_3x_1 + {}_2a_3x_2 + {}_3a_3x_3 + {}_4a_3x_4 + {}_5a_3(2x_4 - x_3) = {}_1l_x(-x_3) + {}_2l_x(20 - y_3) + {}_3l_x(35 - z_3) + {}_4l_x\left[50 - \left(z_3 + t_2 - \frac{y_3 + t_1}{2}\right)\right] + d_N\left[-x_3 \cdot {}_1V + (20 - y_3) \cdot {}_2V + (35 - z_3) \cdot {}_3V + \left(50 - z_3 - t_2 + \frac{y_3 + t_1}{2}\right) \cdot {}_4V\right] + {}_1d_Nt_1 + {}_2d_Nt_2 + {}_3d_N\left(z_3 + t_2 - \frac{y_3 + t_1}{2}\right)$$

$$4 - 625: \quad {}_0a_4\Delta T + {}_1a_4x_1 + {}_2a_4x_2 + {}_3a_4x_3 + {}_4a_4x_4 + {}_5a_4(2x_4 - x_3) = {}_1m_x(-x_4) + {}_2m_x(20 - y_4) + {}_3m_x\left[35 - \left(y_4 + z_3 - \frac{x_4 + z_2}{2}\right)\right] + c_N\left[-x_4 \cdot {}_1V + (20 - y_4) \cdot {}_2V + \left(35 - y_4 - z_3 + \frac{x_4 + z_2}{2}\right) \cdot {}_3V\right] + {}_1c_NZ_1 + {}_2c_NZ_2 + {}_3c_NZ_3 + {}_4c_N\left(y_4 + z_3 - \frac{x_4 + z_2}{2}\right)$$

$$1. \text{ Fecho} - 605: \quad {}_0b_1\Delta T + {}_1b_1y_1 + {}_2b_1y_2 + {}_3b_1y_3 + {}_4d_1y_4 + {}_5b_1(2y_4 - y_3) = {}_1h_y(-x_1) + {}_2h_y(20 - y_1) + {}_3h_y(35 - z_1) + {}_4h_y(50 - t_1) + {}_5h_y(65 - 2t_1 + z_1)$$

$$2 - 605: {}_0b_2 \Delta T + {}_1b_2 y_1 + {}_2b_2 y_2 + {}_3b_2 y_3 + {}_4b_2 y_4 + \\ + {}_5b_2 (2y_4 - y_3) = {}_1k_y (-x_2) + {}_2k_y (20 - \\ - y_2) + {}_3k_y (35 - z_2) + {}_4k_y (50 - t_2) + \\ + {}_5k_y (65 - 2t_2 + z_2)$$

$$3 - 605: {}_0b_3 \Delta T + {}_1b_3 y_1 + {}_2b_3 y_2 + {}_3b_3 y_3 + {}_4b_3 y_4 + \\ + {}_5b_3 (2y_4 - y_3) = {}_1l_y (-x_3) + {}_2l_y (20 - \\ - y_3) + {}_3l_y (35 - z_3) + {}_4l_y \left[50 - (z_3 + \\ + t_2 - \frac{y_3 + t_1}{2}) \right] + d_N \left[-x_3 \cdot {}_3V + (20 - \\ - y_3) \cdot {}_3V + (35 - z_3) \cdot {}_3V + (50 - z_3 - \\ - t_2 + \frac{y_3 + t_1}{2}) \cdot {}_3V \right] + {}_1d_N t_1 + {}_2d_N t_2 + \\ + {}_3d_N \left(z_3 + t_2 - \frac{y_3 + t_1}{2} \right)$$

$$4 - 605: {}_0b_4 \Delta T + {}_1b_4 y_1 + {}_2b_4 y_2 + {}_3b_4 y_3 + {}_4b_4 y_4 + \\ + {}_5b_4 (2y_4 - y_3) = {}_1m_y (-x_4) + {}_2m_y (20 - \\ - y_4) + {}_3m_y \left[35 - \left(y_4 + z_3 - \frac{x_4 + z_2}{2} \right) \right] + \\ + c_N \left[-x_4 \cdot {}_4V + (20 - y_4) \cdot {}_4V + \\ + \left(35 - y_4 - z_3 + \frac{x_4 + z_2}{2} \right) \cdot {}_4V \right] + \\ + {}_1c_N Z_1 + {}_2c_N Z_2 + {}_3c_N Z_3 + {}_4c_N \left(y_4 + \\ + z_3 - \frac{x_4 + z_2}{2} \right)$$

$$1. \text{ Fecho} - 590: {}_0c_1 \Delta T + {}_1c_1 z_1 + {}_2c_1 z_2 + {}_3c_1 z_3 + {}_4c_1 \left(y_4 + \\ + z_3 - \frac{x_4 + z_2}{2} \right) + {}_6d_1 \left[-x_4 \cdot {}_4V + \\ + (20 - y_4) \cdot {}_4V + \left(35 - y_4 - z_3 + \\ + \frac{x_4 + z_2}{2} \right) \cdot {}_4V \right] = {}_1h_z (-x_1) + {}_2h_z (20 - \\ - y_1) + {}_3h_z (35 - z_1) + {}_4h_z (50 - t_1) + \\ + {}_5h_z (65 - 2t_1 + z_1)$$

$$2 - 590: {}_0c_2 \Delta T + {}_1c_2 z_1 + {}_2c_2 z_2 + {}_3c_2 z_3 + {}_4c_2 \left(y_4 + \\ + z_3 - \frac{x_4 + z_2}{2} \right) + {}_6d_2 \left[-x_4 \cdot {}_4V + \right.$$

$$\left. + (20 - y_4) \cdot {}_4V + \left(35 - y_4 - z_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{x_4 + z_2}{2} \right) \cdot {}_4V \right] = {}_1k_z (-x_2) + \\ + {}_2k_z (20 - y_2) + {}_3k_z (35 - z_2) + {}_4k_z (50 - \\ - t_2) + {}_5k_z (65 - 2t_2 + z_2)$$

$$3 - 590: {}_0c_3 \Delta T + {}_1c_3 z_1 + {}_2c_3 z_2 + {}_3c_3 z_3 + {}_4c_3 \left(y_4 + \\ + z_3 - \frac{x_4 + z_2}{2} \right) + {}_6d_3 \left[-x_4 \cdot {}_4V + \\ + (20 - y_4) \cdot {}_4V + \left(35 - y_4 - z_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{x_4 + z_2}{2} \right) \cdot {}_4V \right] = {}_1l_z (-x_3) + {}_2l_z (20 - \\ - y_3) + {}_3l_z (35 - z_3) + {}_4l_z \left(50 - z_3 - t_2 + \right. \\ \left. + \frac{y_3 + t_1}{2} \right)$$

$$1. \text{ Fecho} - 575: {}_0d_1 \Delta T + {}_1d_1 t_1 + {}_2d_1 t_2 + {}_3d_1 \left(z_3 + t_2 - \right. \\ \left. - \frac{y_3 + t_1}{2} \right) + {}_6d_1 \left[-x_3 \cdot {}_3V + (20 - \\ - y_3) \cdot {}_3V + (35 - z_3) \cdot {}_3V + (50 - z_3 - \\ - t_2 + \frac{y_3 + t_1}{2}) \cdot {}_3V \right] = {}_1h_t (-x_1) + \\ + {}_2h_t (20 - y_1) + {}_3h_t (35 - z_1) + {}_4h_t (50 - \\ - t_1) + {}_5h_t (65 - 2t_1 + z_1)$$

$$2 - 575: {}_0d_2 \Delta T + {}_1d_2 t_1 + {}_2d_2 t_2 + {}_3d_2 \left(z_3 + t_2 - \right. \\ \left. - \frac{y_3 + t_1}{2} \right) + {}_6d_2 \left[-x_3 \cdot {}_3V + (20 - \\ - y_3) \cdot {}_3V + (35 - z_3) \cdot {}_3V + \left(50 - \right. \right. \\ \left. \left. - z_3 - t_2 + \frac{y_3 + t_1}{2} \right) \cdot {}_3V \right] = {}_1k_t (-x_2) + \\ + {}_2k_t (20 - y_2) + {}_3k_t (35 - z_2) + {}_4k_t (50 - \\ - t_2) + {}_5k_t (65 - 2t_2 + z_2)$$

O cálculo deste sistema de equações foi efectuado em máquinas electrónicas de cartões perfurados.

Para terminar resta fazer referência a dois estudos recentes. O primeiro de LOMBARDI [1955] faz um estudo geral da acção de casca e dos efeitos de torsão. Depois de estabelecer o sistema de equações diferenciais aplicáveis ao cálculo de uma *casca cilíndrica* de espessuras variáveis faz a discussão de um método aproximado para a sua integração. Para ter em conta o efeito de torsão na resolução das equações diferenciais, o autor introduz um sistema de arcos e consolas como auxiliar do cálculo. Chama-se particularmente a atenção para a crítica ao método de TÖLKE feita nesta obra e para a conclusão sobre a grande importância que tem a torsão no funcionamento das barragens-abóbada.

O segundo estudo, da autoria de ALLEN, CHITY, PIPPARD e SEVERN [1956], pode ser considerado um passo decisivo para a solução analítica correcta da determinação de tensões numa barragem-abóbada (SERAFIM [1956]). Segundo os autores, não havendo experiência em Inglaterra no uso do «trial-load», foi decidido aplicar os métodos de relaxação. Os princípios agora desenvolvidos para o cálculo das tensões baseiam-se directamente na Teoria da Elasticidade, o que significa que as hipóteses da Resistência de Materiais, especialmente as que se referem à distribuição linear das tensões e que tinham servido de base a todos os métodos analíticos anteriores, foram abandonadas.

O método não só apresenta uma solução mais rigorosa para o cálculo de barragens-abóbada mas também tem o mérito de provar que é possível obter — praticamente — a solução de qualquer problema de elasticidade tridimensional. Sem dúvida que tal resultado é devido ao extraordinário desenvolvimento que nos últimos tempos têm tido os métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais, para os quais a experiência inglesa sobre os métodos de relaxação tem dado uma importantíssima contribuição. Parece-nos que a razão primária da potencialidade e universalidade desses métodos é a sua simplicidade teórica.

Vejamos então em linhas muito gerais em que consiste o método. Consideremos uma barragem de paramento de montante cilíndrico e um sistema de coordenadas cilíndrico.

Sejam u , v e w as componentes radial, vertical e tangencial dos deslocamentos, σ e τ as tensões normais e tangenciais. As conhecidas relações entre as extensões ϵ e distorsões γ e as derivadas dos deslocamentos, fornecem, a partir da lei de Hooke, as expressões seguintes em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1+\nu}{E} \sigma_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sigma}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\frac{1+\nu}{E} \sigma_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\frac{1+\nu}{E} \sigma_z = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\frac{1+\nu}{E} \tau_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\frac{1+\nu}{E} \tau_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

$$\frac{1+\nu}{E} \tau_{\theta r} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$$

Se, nas equações de equilíbrio das tensões (vidé por exemplo TIMOSHENKO — Theory of Elasticity), se substituírem os valores de σ e τ tirados destas equações, vêm as três seguintes equações diferenciais em termos de deslocamentos:

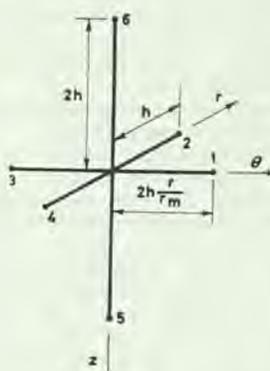
$$(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{1-2\nu}{2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{3-4\nu}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} + \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} = 0,$$

$$(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1-2\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} = 0,$$

$$(1-\nu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1-2\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{3-4\nu}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial z} = 0.$$

Estas equações têm de ser satisfeitas para as condições aos limites existentes numa barragem: no paramento de montante todas as componentes de tensão são nulas com excepção da tensão normal ao paramento que é igual à pressão da água. No paramento de jusante todas as tensões são nulas e na fundação (considerada indeformável) os deslocamentos são nulos.

Dividindo a barragem numa rede de lados verticais, radiais e tangenciais horizontais, tão apertada quanto o rigor que se quiser, e arbitrando para cada vértice da malha um trio de valores para os deslocamentos u , v e w , verifica-se se este trio de valores satisfaz às equações às diferenças finitas que resultam do sistema de equações anterior. Note-se que as expressões que correspondem às derivadas de uma função $q(z, r, \theta)$ são:



$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial q}{\partial r}\right)_o = \frac{q_2 - q_4}{2h} \\ \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)_o = \frac{q_5 - q_6}{4h} \\ \left(\frac{\partial q}{\partial \theta}\right)_o = \frac{q_1 - q_3}{4h} \\ \left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2}\right)_o = \frac{q_2 + q_4 - 2q_o}{4h^2} \\ \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

Certamente esses trios de valores não satisfazem essas equações de diferenças finitas. O resto da verificação de cada equação chama-se resíduo. Note-se que nos pontos da fronteira, u , v e w , ou relações entre eles, são conhecidos e, portanto, permanecem invariantes. O método de relaxação consiste em proceder, ordenadamente, à anulação desses resíduos em cada um dos vértices da malha (excepto os da fronteira onde os valores de u , v e w , ou suas relações permanecem como se disse invariantes) usando as várias técnicas operatórias de relaxação em bloco, relaxação por grupos, etc. (ver SOUTHWELL [1946 e 1956] e ALLEN [1954]).

A substituição das equações anteriores pelas equações das diferenças correspondentes levam às seguintes fórmulas para os resíduos:

$$\begin{aligned} Fu_o &= \left(1 + \frac{h}{2r_o}\right) u_2 + \left(1 - \frac{h}{2r_o}\right) u_4 + \frac{1-2\nu}{8(1-\nu)} (u_5 + \\ &+ u_6) + \frac{1-2\nu}{8(1-\nu)} \frac{r^2}{r_o^2} (u_1 + u_3) - \left[\frac{9-10\nu}{4(1-\nu)} + \right. \\ &+ \left. \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \frac{r^2}{r_o^2} + \frac{h^2}{r_o^2}\right] u_o - \frac{3-4\nu}{8(1-\nu)} \frac{hr}{r_o^2} (w_1 - w_3) + \\ &+ \frac{1}{16(1-\nu)} (v_7 - v_8 + v_9 - v_{10}) + \frac{1}{16(1-\nu)} \frac{r}{r_o} (w_{11} - \\ &- w_{12} + w_{13} - w_{14}) \end{aligned}$$

$$Fv_o = \dots$$

$$Fw_o = \dots$$

As formas curvas dos paramentos, especialmente o paramento de jusante, complicam extraordinariamente as condições de fronteira, obrigando a processos de cálculo cheios de artifícios. Chama-se a atenção do leitor para a publicação original para uma melhor compreensão da complexidade do problema.

As principais objecções que se podem pôr a este método são:

a) Grande complexidade dos cálculos. No estado actual, só especialistas no método de relaxação podem pretender fazer a sua aplicação.

b) Grande demora na obtenção dos resultados. A aplicação à barragem de *Donkan* levou tres anos de cálculo pelos melhores especialistas na matéria.

c) Ser muito difícil de generalizar para as formas mais modernas de barragens-abóbada.

NOTA FINAL: Grande parte do trabalho aqui referido foi realizado na Hidro-Eléctrica do Zêzere. O apoio dado por essa entidade ao desenvolvimento, em Portugal, dos métodos de cálculo de barragens-abóbada é merecedor de todo o reconhecimento. Desejamos também agradecer a franca colaboração que, nesta matéria, sempre temos tido do Eng. António Ferreira da Silveira.

BIBLIOGRAFIA

- 1 — ALLEN, D. N.; FOX, L.; e SOUTHWELL, R. V. — Relaxation method applied to engineering problems. Phil. Trans. Roy. Soc., London, n.º 7, A, 1945.
- 2 — ALLEN, D. N. — Relaxation Methods. Mc. Graw-Hill Book Company, Inc. New-York, 1954.
- 3 — ALLEN, D. N.; CHITY, L.; PIPPARD, A. e SEVERN, R. — The experimental and mathematical analysis of arch dams, with special reference to Dakan. Proc. Inst. of Civil Engrs. London, n.º 4, vol. 5, part. I, 1956.
- 4 — Anleitung für den Entwurf, Bau und Betrieb von Talsperren. Mitteilungen des Deutschen Wasserwirtschafts und Wasserkraft Verbandes E. V. Berlin, 1930.
- 5 — ARREDI, F. — Contributo al calcolo delle dighe ad arco-gravità — L'Energia Elettrica, n.º 9 e 10, vol. 21, Set. Out. 1944.
- 6 — ARREDI, F. — Sulla struttura serbatoio in vista della applicazione alla teoria delle dighe arcuate — L'Energia Elettrica, n.º 9, vol. 33, 1956.
- 7 — BAILHACHE, J. G.; HAUG, T. L. E. — Shell Action in Arch-Dams — Western Construction News, p. 241, 10 Maio, 1931.
- 8 — Barrages en arc-Nouvelles Annales de la Construction. — Paris. Nov. e Dez. 1924, Jan., Fev., Março, Abril e Maio 1925.
- 9 — BAZANT, Z. — Théorie exacte des enveloppes cylindriques épaisses — 2.º Cong. Ass. Int. Ponts et Charp. Berlin, vol. 4, 1936.
- 10 — BELLET, H. — Barrages en maçonnerie et murs de reservoirs — Paris, 1907.
- 11 — BERIO, A. — Sulla verifica delle dighe ad arco e arco gravità mediante estensione della teoria dei serbatoi — L'Energia Elettrica, n.º 8, vol. 27, 1950.

- 12 — BERNARDI, M. — Raffronto tra i risultati sperimentali su modello ed i calcoli istituiti secondo il metodo del Toelke per una grande diga ad arco. — Istituto di Scienza delle Costruzioni del Politecnico di Milano, Milano, n.º 34, 1954.
- 13 — BERNARDI, M. — Sul calcolo di prima approssimazione delle dighe ad arco-cupola. — *L'Energia Elettrica*, n.º 11, vol. 23, p. 1148, 1956.
- 14 — BINNIE, A. M. — Axially symmetrical stress in a thick tube. *Phil. Mag.*, p. 336, Oct. 1941.
- 15 — BOEUF, P. — The analysis of arched-dams. — 2º Congrès des Grands Barrages, Washington, 1936.
- 16 — BONETTI, P. — Sul calcolo delle sollecitazioni termiche nelle volte delle dighe a volte multiple. — *L'Energia Elettrica*, n.º 3, 1928.
- 17 — BOSSHARD, E. — Beiträge zur Theorie und Berechnung des Bogenstaumauern. Leemann, Zürich, 1949.
- 18 — BOURGIN, A. — Cours de calcul des barrages. — Eyrolles, Paris, 1948, (traduzione) Design of dams. — Pittman, Londres, 1953.
- 19 — U. S. Bureau of Reclamation, Trial load method of analysing arch dams. — Denver, Colorado, 1938.
- 20 — U. S. Bureau of Reclamation. — Treatise on dams — Chapter 10. Arch dams, Denver, 1948.
- 21 — CAIN, W. — The circular arch under normal loads. — *Trans. Am. Soc. Civ. Engrs.*, vol. 85, p. 233, 1922.
- 22 — CAMPINI, E. — Costruzioni idrauliche ed idraulica tecnica — Hoepli, Milano, 1923.
- 23 — CAMPINI, E. — La ripartizione del carico idrostatico fra travi ed archi nelle dighe di ritenuta a volta unica. — *L'Energia Elettrica*, n.º 11, 1929.
- 24 — CAMPINI, E. — Comparaison des tensions dues à la température et des tensions dues à la pression hydrostatique dans les barrages en arc. — *L'Energia Elettrica*, n.º 3, 1932.
- 25 — CAQUOT, A. — Étude élastique des voûtes épaisses et à forte courbure. — *Ann. Ponts et Chauss.*, Jul.-Ag. 1926.
- 26 — CAROTHERS, S. — Stresses in dams. — Proceedings First International Congress for Concrete and Reinforced Concrete, Liège, 1930.
- 27 — CARTON, F. — Calcul des barrages en arc. — *Génie Civil*, Ag.-Out. 1924.
- 28 — CHAMBAUD, R. — Théorie des voûtes circulaires épaisses. — *Génie Civil*, Março, 1926.
- 29 — CHAMBAUD, R. — Théorie des voûtes circulaires et des tubes épais. — *Génie Civil*, Ag.-Set. 1926.
- 30 — CHAMBAUD, R. — Calcul des coupoles elliptiques surbaissées. — *Ann. Inst. Tech. Bât. et T. P.*, Maio 1950.
- 31 — COMSTOCK, C. — On the stress in arch dams. — New-York, 1931.
- 32 — COYNE, A. — Leçons sur les grands barrages — Paris, 1943.
- 33 — COYNE, A. — Symposium on arch dams. Their philosophy. — *Proc. Am. Soc. Civ. Engrs.* Paper. 959, PO 2, vol. 82, Abril 1956.
- 34 — CRAVITZ, P. — Analysis of thick arch-dams. — *Proc. Am. Soc. Civ. Engrs.* p. 43, 1935.
- 35 — CRAVITZ, P. — Analysis of thick arch-dams, including abutment yield. — *Trans. Am. Soc. Civ. Engrs.* 1936.
- 36 — CREAGER, P. W.; JUSTIN, J. e HINDS, J. — Engineering for dams. — New-York, vol. II, 1946.
- 37 — DAVIN, M. — Application de la statique des voiles minces à l'étude des barrages. — *Ann. des Ponts et Chaussées*, p. 47, Jan.-Fev. 1947.
- 38 — DIN 19700 — Stananlagen — Richtlinien für den Entwurf Bau und Betrieb Teil I, Talsperren. Pev. 1953.
- 39 — DISCHINGER, F. — Die strenge Theorie der Kreiszyllinderschale. — *Beton und Eisen* 34, 1935.
- 40 — EHRMANN, P. — Le barrage de Castillon. — *Ann. Ponts et Chaussées*, Set.-Out. 1949.
- 41 — ENGSEER, F. — Zentralblatt der Bauverwaltung S. 306, 1893.
- 42 — Engineering foundation, committee on arch dams investigation. — Report by Committee — vol. I, Maio 1928.
- 43 — Engineering foundation, committee on arch dams investigation. — Report by Committee, vol. III, 1933.
- 44 — Engineering foundation, committee on arch dams investigations. — Report by Committee, vol. II, 1934.
- 45 — ENYEDI, B. — Trägerrost und Platte. — *Beton und Eisen* 34, 1935.
- 46 — EVANS, T. D. S. B. — Report n.º 36, 5 Jun. 1944.
- 47 — FEDERHOFFER, K. — Contribución al cálculo de diques en cupula — *Technica*, Tucuman, n.º 5, 1953.
- 48 — FLUGGE, W. — Statik und Dynamik der Schalen. — Berlin, 1934.
- 49 — FORTI, A. — Sul calcolo delle dighe a volta unica. — *L'Energia Elettrica*, p. 836, 1928.
- 50 — FOWLER, F. H. — A graphic method for determining the stresses in circular arches under normal loads by the Cain formulas. — *Trans. Am. Soc. Civ. Engrs.*, vol. 92, p. 1512, 1928.
- 51 — GALLI, G. — Sul calcolo delle dighe a semplice curvatura. — *L'Energia Elettrica*, Agosto 1942.
- 52 — GHERARDELLI, L. — Contributo alla teoria delle dighe a volta. — *L'Energia Elettrica*, p. 99, 1930.
- 53 — GHIRARDINI, A. — Contributo al calcolo delle dighe a gravità alleggerite. — *L'Energia Elettrica*, Milano, n.º 9, 1956.
- 54 — GLOVER, R. E. e COPEN, M. D. — Symposium on arch-dams. — Trial Load Studies of Hungry Horse Dam — *Proc. Am. Soc. Civ. Engrs.* Paper 960 PO2 vol. 82, Abril 1956.
- 55 — GOODALL, G. E. e NELIDOV, I. M. — Stresses in inclined arches of multiple-arch dams. — *Proc. Am. Soc. Civ. Engrs.* p. 387, Março, 1932.
- 56 — GREGOR, C. W. Mc. e COFFIN, L. F. — Approximate solution for symmetrically loaded thickwalled cylinders. — *J. Appl. Mech.*, Dez. 1947.
- 57 — GRUNER, H. E. — La construction des barrages-voûtes en Suisse. — *Génie Civil*, Agosto 1925.
- 58 — GUIDI, C. — Sulle dighe ad arco — *L'Ingegnere*, n.º 2, Ag. 1927.
- 59 — GUIDI, C. — Statica delle dighe per laghi artificiali. — Bona, Torino, 1928.
- 60 — HARGREAVEN, M. — Efforts élastiques développés dans les barrages-voûtes par les diverses conditions de température et de retrait du béton. *Ann. des Ponts et Chaussées*, p. 205, Nov.-Dez. 1927.
- 61 — HANNA, F. W. — Analysis of arch dams by the dummy unit loading method and the law of superposition. — *Western Construction News*, p. 89, Fev. 1929.
- 62 — HANNA, F. W.; HAUG, T. L. E. — Some adjustments of stresses in arch rings of arch dams. — *Western Construction News*, p. 574, 10 Set. 1928.
- 63 — HANNA, F. W. e HAUG, T. L. E. — Multi-centered fixed ended arch rings of arch dams and their analysis. — *Western Construction News*, p. 414, 25 Jun. 1928.
- 64 — HANNA, F. W. e HAUG, T. L. E. — Arch dams with rings of variable thickness. — *Western Construction News*, p. 336, 25 Maio 1928.
- 65 — HANNA, F.; KENNEDY, R. C. — The design of dams. — Mac Graw Hill, 1938.
- 66 — HARRISON, C. L. e WOODGARD, S. H. — Analysis of stresses in Lake Cheesman dam. — *Trans. Am. Soc. Civ. Engrs.* 1904.
- 67 — HEILBRON, C. H. e SAYLOR, W. H. — Graphical arch analysis applicable to arch dams. — *Proc. Am. Soc. Civ. Engrs.* p. 4, 1939.
- 68 — HEILBRON, Jr., C. H. — Graphical arch analysis applicable to arch dams (discussion) — *Proc. Am. Soc. Civ. Engrs.*, Lancaster, n.º 2, vol. 66, 1940.
- 69 — HERTWIG, A. — Die Fehlerwirkungen beim Auflösen linearer Gleichungen und die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. — *Eisenbau*, S. 110, 1917.
- 70 — HOFACKER, K. — Das Talsperrenengewölbe. — Diss. ETH, Zürich, 1936.
- 71 — HOUCK e RAND — Trial load analysis of non linear stress changes in Shasta dam due to earthquake effect. — Bureau of Reclamation, Denver 1941.

- 72 — HOUK, Fred A. — Discussion of «Design and Observation of Arch Dams in Portugal» by M. Rocha, J. Laginha Serafim e A. F. da Silveira. Proc. ASCE, paper 1185, vol. 83, Pol. Feb. 1953.
- 73 — HOUK, I. E. — Technical design of high masonry dams — The Eng., p. 105 e 108, 1933.
- 74 — HOUK, I. E. — Technical design studies for Hoover dam — West. Construction News, p. 187, 1933.
- 75 — HOUK, I. E. — Trial load method of masonry dams analysis — West. Construction News, p. 455, 1933.
- 76 — HOUK, I. E. — Trial load analysis of curved concrete dams — The Eng., p. 3 e 28, 1935.
- 77 — HOUK, I. E. — Arch deflections and temperature stresses in curved dams — The Eng., p. 382 e 414, 1937.
- 78 — HOWELL, C. H.; JAQUITH, A. C. — Analysis of arch dams by the trial load method. — Trans. Am. Soc. C. E., v. 93, p. 1191, 1929.
- 79 — IPPOLITO, G. — Sul calcolo delle dighe ad arco. — Hoepf., Milano, 1923.
- 80 — IPPOLITO, G. — Nouvelle contribution à l'étude des barrages en arc. Conditions d'économie maximum effets des variations de température. Bérauger, Paris, et Liège, 1927.
- 81 — JACOBSEN, A. Aas. — Über das Randstörungsproblem an Kreiszyinderschalen. Bauing, 20 (1939) — Sur le calcul de la voûte cylindrique circulaire. — Travaux 21, 1937.
- 82 — JAKOBSEN, B. F. — Stresses in thick arches of dams — Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., p. 475, 1927.
- 83 — JAKOBSEN, B. F. — Notes on arched gravity dams. — Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., v. 92, p. 766, 1928.
- 84 — JAEGER, C. — Arch dam construction and design. — Civil Eng. and Pub. Works Review, Abr.-Set. 1950.
- 85 — JORGENSEN, L. — The constant angle arch dam. — Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., vol. 78, pg. 685, 1915.
- 86 — JUILLARD, H. — Influence de l'encastrement latéral dans les grands barrages. — Schweiz. Bauzeitung, 1921.
- 87 — JUILLARD, H. — Calcul des barrages arqués. — Schweiz. Bauzeitung, 1923.
- 88 — JURECKA, W. — Le calcul des barrages voûtés par le procédé de la distribution des charges. — Öster. Bauz., Dez. 1949.
- 89 — JURECKA, W. — Die Berechnung bogenförmiger Staumauern nach dem Lastaufteilungsverfahren. — Oesterreichische Bauzeitschrift Heft XI/XII, 1949.
- 90 — JURECKA, W. — Beiträge zur Berechnung von Bogenstaumauern nach dem Lastaufteilungsverfahren. — Diss — Graz, 1949.
- 91 — JURECKA, W. — Der Einfluss des Tangential und Torsionsausgleiches auf die nach dem Lastaufteilungsverfahren bestimmten Spannungen in Gewölbestaumauern. — Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur und Architekten Vereines. Heft XI/XII, 1953.
- 92 — KAECH, A.; LOMBARDI, J. — Quelques considerations sur les barrages voûtés. — Traduction n.º 1837. — Electricité de France, 1953.
- 93 — KALMAN, E. — Sul calcolo delle dighe di ritenuta a pianta circolare. L'Energia Elettrica, p. 387, 1926.
- 94 — KALMAN, E. — Contributo allo studio degli sforzi di scorrimento nelle dighe ad arco. — L'Energia Elettrica, Jul., 1927.
- 95 — KALMAN, E. — Contributo allo studio dei carichi di correzione da applicarsi, in aggiunta alla pressione idrostatica e sugli anelli staccati delle dighe a volta. — L'Energia Elettrica, p. 604, Jun. 1927.
- 96 — KARPOV, A. V. — The compensated arch dams. — Proc. Am. Soc. Civ. Engrs., p. 508, 1932.
- 97 — KAMBO, L. — Studio sulla diga di prova Stevenson. — L'Energia Elettrica, n.º 11 e 12, 1928.
- 98 — KAMBO, L. — Proposta di un nuovo metodo di calcolo delle dighe. — L'Energia Elettrica, p. 257, 1934, e p. 279, 1935.
- 99 — KELEN, N. — Talsperren. Berlin e Leipzig, 1931.
- 100 — KELEN, N. — Die Staumauern. — Berlin, 1936.
- 101 — KIRN, F. — Design criteria for concrete gravity and arch dams. — U. S. Bureau of Reclamation, Eng. Monograph n.º 19, 1953.
- 102 — KÖGLER, F. — Sohldruckverteilung unter Pfeilern. — Bauing., 1933.
- 103 — KOLLBRUNNER, C. F. — Fundation und Konsolidation, Bd. 1, Zürich, 1946.
- 104 — KRALL, G. — La diga di sbarramento a volta-cupola per laghi artificiali. — Casa Editrice Perrella, Roma, 1951.
- 105 — LARNED, A. T.; MERRIL, W. S. — Actual deflections and temperatures in a trial load arch dam. — Proc. Am. Soc. Civ. Engrs., p. 723, Março 1953.
- 106 — LARDY, P. — Contribution au calcul des barrages arqués. — Congrès de Liège de l'A. I. P. C., 1948.
- 107 — LIEURANCE, R. S. — Design of arch dams. — Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., vol. 106, p. 1131, 1941.
- 108 — LOMBARDI, J. — Les barrages en voûte mince. — Rouge, Lausanne, 1955.
- 109 — LUZZATO, B. — Applicazione del metodo di Ritter al calcolo di una diga ad arco. — Giornale del Genio Civile, 1918.
- 110 — MALTERRE, M. — Calcul des grands barrages de réservoirs en forme de voûtes. — Ann. Ponts et Chaussées, Nov.-Dez., 1922.
- 111 — MALDONADO, R. — Estudio original encerca de la teoria de digues en arco o presas bovedas. — 2.º Cong. Grands Barrages, Washington, 1936.
- 112 — MENSCH, L. J. — Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., p. 610, 1915.
- 113 — MÉRIAUX, A. — Contraintes et déformations dans les voûtes sous l'effet des variations de la température ou de l'état hygrométrique du béton. — Travaux, Jul. 1949.
- 114 — MIESEL, R. — Über die Festigkeit von Kreiszyinderschalen bei nicht achsensymmetrischer. — Belastung, Ing. Arch. 1, 1930.
- 115 — MÖRSCH, E. — Berechnung Kreisförmiger Gewölbe gegen Wasserdruck. — Schweiz. Bauzeitung, 1908.
- 116 — NICCOLAI, F. — Concetti antarchici nella progettazione di dighe italiane. — L'Elettrotecnica, n.º 19, p. 181, 1941.
- 117 — NOETZLI, F. A. — Arch action in curved dams. — Engineering and contracting, vol. 55, p. 372, 13 de Abril 1921.
- 118 — NOETZLI, F. A. — Gravity and arch action in curved dams. — Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., p. 1, 1921.
- 119 — NOETZLI, F. A. — The relations between deflections and stresses in arch dams. — Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., vol. 85, p. 284, 1922.
- 120 — NOETZLI, F. A. — Improved type of multiple arch dam. — Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., vol. 87, p. 351, 1924.
- 121 — NOETZLI, F. A. — Multiple arch dams em E. Wegman — The design and construction of dams. — J. Wiley, N. Y., p. 439, 1927.
- 122 — NOETZLI, F. A. — Laminated arch dams with forked abutments. — Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., vol. 95, p. 533, 1931.
- 123 — OBERTI, G. — Studi sul comportamento statico di archi circolari considerati come elementi di dighe a volta. — L'Energia Elettrica, 1936, Milano, 1937.
- 124 — OBERTI, G. — Ricerche sperimentali sul comportamento statico delle dighe. — Inst. Sperimentale Applic. Calcestruzzo, 1949, Elettrotecnica, Março 1949.
- 125 — OBERTI, G. — La ricerca sperimentale su modelli come contributo al progetto delle grandi costruzioni. Tecnica Italiana, Março-Abr. 1951.
- 126 — OHDE, J. — Die Berechnung der Sohldruckverteilung unter Grundungskörpern. — Bauing., 1942.
- 127 — PAGLIARO, F. — Il progresso delle dighe. — L'Energia Elettrica, vol. 18, p. 726, 1940.
- 128 — PARME, A. L. — Arch dams with arches of variable thickness — Modern developments in reinforced concrete, n.º 21. Portland Cement Association, Chicago, 1948.
- 129 — PASTERNAK, P. — Berechnung vielfach Statisch unbestimmter biegefechter Stab- und Flächentragwerke. — Zürich und Leipzig 1927.
- 130 — PEARCE, C. E. — The analysis of circular arch dams by Cain's method, including shear. — Western Construction News, n.º 17, vol. 2, p. 35, 9 Set. 1927.
- 131 — PERKINS, W. A. — Analysis of arch dams. — Western Construction News, n.º 7, vol. 2, p. 43, 10 Abr. 1927.

- 132 — PERKINS, W. A. — Analysis of arch dams of variable thickness. — Proc. Am. Soc. Civil Engrs., Paper 129, vol. 78, Maio 1952.
- 133 — PIGEAUD, G. — Note sur le calcul des barrages en voûte. — Génie Civil, Jul. 1922.
- 134 — POESCHL, Th. — Die Berechnung der Spannungen in zylindrischen Behälterwänden mit veränderlichem Owerschnitt. — Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, Jun. 1912.
- 135 — RÉSAL, M. — Formes et dimensions des grands barrages en maçonnerie. — Annales des Ponts et Chaussées, I, p. 165, Março-Abr. 1919.
- 136 — RESHER, O. J. — Die Gewölbemaauern Berechnung einer Kreiszylinderschale mittelsrelaxation method. — Ab. Dokum. Technik. Wien, 1951.
- 137 — RITTER, H. — Berechnung der bogenförmigen Stau-mauern. Diss Karlsruhe, 1913.
- 138 — RITTER, M. — Beiträge zur Theorie und Berechnung der Vollwandigen Bogenträger ohne Scheitel-gelenk. Berlin, 1909.
- 139 — RITTER, M. — Der biegungsfeste Rahmen mit Flächenlagerung. — Schweiz. Bauzeitung, 1913.
- 140 — RITTER, M. — Analytische Berechnung gelenkloser Brückengewölbe. — Denkschrift der E. T. H. zur Jahrhundertfeier des S. I. A., 1937.
- 141 — ROCHA, M. e SERAFIM, J. — Analysis of arch dams by model tests. — Fifth Congress on Large Dams, Paris, 1955.
- 142 — ROCHA, M.; SERAFIM, J.; SILVEIRA, A e NETO, J. — Model tests analytical computation and observation of an arch dam. — Proc. Am. Soc. Civ. Engrs., Separate n.º 696, Maio 1955.
- 143 — ROHN, A. — Beitrag zur Berechnung massiver Stau-mauern — Schweiz. Bauz., vol. 79, p. 126, 1922.
- 144 — ROHN, A. — Zur Berechnung der Gewölbema-uern S. B. Z., Heft 1, 1926.
- 145 — ROSE, E. — Trial load analysis of stresses in Seminoe dam. — Bureau of Reclamation, Denver, 1939.
- 146 — ROSE, E. — Trial load check analysis of stresses in Parker dam. — Bureau of Reclamation, Denver, 1939.
- 147 — RUFFIEUX — Étude sur la résistance des barrages en maçonnerie — Annales des Ponts et Chaussées, 1901.
- 148 — SCIMEMI, E. — Dighe — Hoepli, Milano, 1928.
- 149 — SCHLEICHER, F. — Die verteilung der Bodenpres-sungen unter starren Gründungskörpern. Bauing, 1933.
- 150 — SERAFIM, J. L. — Correspondence on paper — The experimental and mathematical analysis of arch dams, with special reference to Donkan. — Proc. Inst. Civ. Engrs., Part. 1, vol. 5, p. 424, Julho 1956.
- 151 — SIGNORINI, A. — Sulle dighe a volta non cilindrica. — Acad. Pontificale des Sciences, n.º 11, vol. 10, 1945 e Publ. Inst. Appl. Calcolo, Roma, 1947.
- 152 — SHERLING, C. E. e SCRIVNER, L. R. — Symposium on arch dams. — Design and construction of Ross dam. — Proc. Am. Soc. Civ. Engrs., Paper 1045, Po4, vol. 82, Agosto 1956.
- 153 — SMITH, G. L. — Arched dams. — Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., vol. 83, p. 2027-2093, 1919-1920.
- 154 — SMITH, B. A. — Experimental deformation of a cy-lindrical arched dam. — Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., vol. 91, p. 705, 1927.
- 155 — SOUTHWELL, R. — Relaxation methods in theoret-ical physics. — Oxford, The Clarendon Press, vol. I, 1946.
- 156 — SOUTHWELL, R. — Relaxation methods in theoret-ical physics. — Oxford, The Clarendon Press, vol. II, 1956.
- 157 — STUCKY, A. E. — Étude sur les barrages arqués. — Bull. Techn. Suisse Romande, Lausanne, vol. 48, pp. 1, 25, 49, 85 e 97 — 1922.
- 158 — STUCKY, A. E.; PANCHAUD, E. e SCHNITZLER, E. — Contribution à l'étude des barrages voûtes. — Bull. Technique Suisse Romande, 8 Abr. 1950.
- 159 — STUCKY, A.; PANCHAUD, E. e SCHNITZLER, E. — Théorie et calcul des barrages en arc. — La Techn-ique Moderne. — Construction, Paris, n.º 7, vol. 5, 1950.
- 160 — SUTHERLAND, R. A. — Load distribution in high arch dams. — Proc. Am. Soc. Civ. Engrs., p. 1027, 1928.
- 161 — TÖLKE, F. — Talsperren. Wasserkraftsanlagen — 2. Hälfte, 1 Teil. Berlin, Springer 1938.
- 162 — TÖLKE, F. — Entwicklung der Bogenstau-mauern. — Bauing., Março-Maio, 1950.
- 163 — TÖLKE, F. — Die Entwicklung der Bogenstau-mauern zum Beherrschen der Bauform für den Ausbau der mitteleuropäischen Wasserkraft. — Bauingenieur, vol. 2, 33 e vol. 5, 170.
- 164 — TONINI, D. — Di un método de verifica delle dighe ad arco per una repartizione per tentativi dei car-achi fra archi e mensole. — Soc. Ed. Rec. Ind. Elettriche. Milano, 1941.
- 165 — TONINI, D. — Sulle possibilità di una risoluzione analitica del método per tentativi di verifica delle dighe. — L'Energia Elettrica, n.º 9, vol. 27, 1950.
- 166 — TONINI, D. — Calcolo di verifica della diga Pieve di Cadore con il método della ripartizione dei carachi tra archi e mensole. — L'Energia Elettrica. Milano, n.º 11, vol. 32, 1955.
- 167 — TREMMEL, E. — Spannungsermittlung aus raumli-chen Dehnungsmessungen in Stau-mauern — Oes-terr. Akad. Wiss. Mat., n.º 16, vol. 86, § 15, 1941.
- 168 — TREMMEL, E. — Beiträge zur Gewölbema-uernberechnung. — Öst. Wasserwirtschaft n.º 5/6, 1951.
- 169 — TREMMEL, E. — Zur Theorie Kreisberandeter Bo-genscheiben. — Öst. Ing. Arch., n.º 1, vol. 8, 1954.
- 170 — TSCHERCH, E.; JABUREK, F. — Berechnungen von bogenstau-mauern im vergleich mit den Ergebnissen statischer modellversuche 1951 — Österreichische Bauzeitschrift, Wien, 1951.
- 171 — VISCHER, H. e WAGONER, L. — On the strains in curved masonry dams. Transactions, Technical Soc. of the Pacific Coast, vol. 6, p. 75, Dez. 1889.
- 172 — VOGT, F. — Über die Berechnung der Fundamentde-formationen. — Oslo, 1925.
- 173 — WEGMANN, E. — The design and construction of dams. — Eighth edition, N. Y. Wiley, 1927.
- 174 — WESTERGAARD, H. M. — Theoretical analysis of the structural action of the Stevenson creek arch-dam. — Arch Dam Investigation, vol. I, Am. Soc. Civ. Engrs., Maio 1928.
- 175 — WESTERGAARD, H. M. — Arch dam analysis by trial loads simplified. — Eng. News Rec., p. 141, 22 Jan. 1931.
- 176 — WESTERGAARD, H. M. — Water pressures on dams during earthquakes. — Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., p. 418, 1933.