

Definição da utilização de transformadores a partir da simulação das condições de temperatura do refrigerante, de carga e de indisponibilidade \*

CDU 621.314.2

CARLOS PORTELA  
Doutor em Engenharia Electrotécnica  
Chefe do Centro de Cálculo da  
Companhia Nacional de Electricidade

3.3.2 — Simulação da média de n amostragens nas estilizações das distribuições a e b

Foram feitas as seguintes simulações correspondentes à média de n amostragens em distribuições proporcionais às estilizações das distribuições a e b, mas de valor médio 1.

| Referência | Tipo de distribuição objecto da amostragem | Número de elementos em cada amostragem da média | Número de simulações |
|------------|--------------------------------------------|-------------------------------------------------|----------------------|
| 1          | a                                          | 6                                               | 100                  |
| 2          | a                                          | 12                                              | 100                  |
| 3          | a                                          | 12                                              | 1 000                |
| 4          | a                                          | 120                                             | 100                  |
| 5          | b                                          | 12                                              | 100                  |
| 6          | b                                          | 120                                             | 100                  |

| Referência | Tipo de<br>distribuição<br>objecto da<br>amostragem | Número de<br>elementos em<br>cada<br>amostragem<br>da média | Número<br>de<br>amostragens | Valores da média correspondentes à probabilidade $p$ de não serem excedidos,<br>tomando como unidade o valor médio das distribuições |            |           |           |           |           |           |            |            |  |
|------------|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|--|
|            |                                                     |                                                             |                             |                                                                                                                                      |            |           |           |           |           |           |            |            |  |
|            |                                                     |                                                             |                             | $p = 0,01$                                                                                                                           | $p = 0,05$ | $p = 0,1$ | $p = 0,2$ | $p = 0,5$ | $p = 0,8$ | $p = 0,9$ | $p = 0,95$ | $p = 0,99$ |  |
| 1          | a                                                   | 6                                                           | 100                         |                                                                                                                                      | 0,30       | 0,47      | 0,56      | 0,78      | 1,36      | 1,94      | 3,02       |            |  |
| 2          | a                                                   | 12                                                          | 100                         |                                                                                                                                      | 0,52       | 0,53      | 0,62      | 0,85      | 1,16      | 1,83      | 2,17       |            |  |
| 3          | a                                                   | 12                                                          | 1000                        | 0,423                                                                                                                                | 0,531      | 0,575     | 0,628     | 0,836     | 1,191     | 1,548     | 2,32       | 3,15       |  |
| 4          | a                                                   | 120                                                         | 100                         |                                                                                                                                      | 0,77       | 0,81      | 0,89      | 1,01      | 1,16      | 1,28      | 1,35       |            |  |
| 5          | b                                                   | 12                                                          | 100                         |                                                                                                                                      | 0,24       | 0,29      | 0,40      | 0,83      | 1,80      | 2,38      | 2,83       |            |  |
| 6          | b                                                   | 120                                                         | 100                         |                                                                                                                                      | 0,64       | 0,71      | 0,79      | 0,99      | 1,19      | 1,33      | 1,45       |            |  |

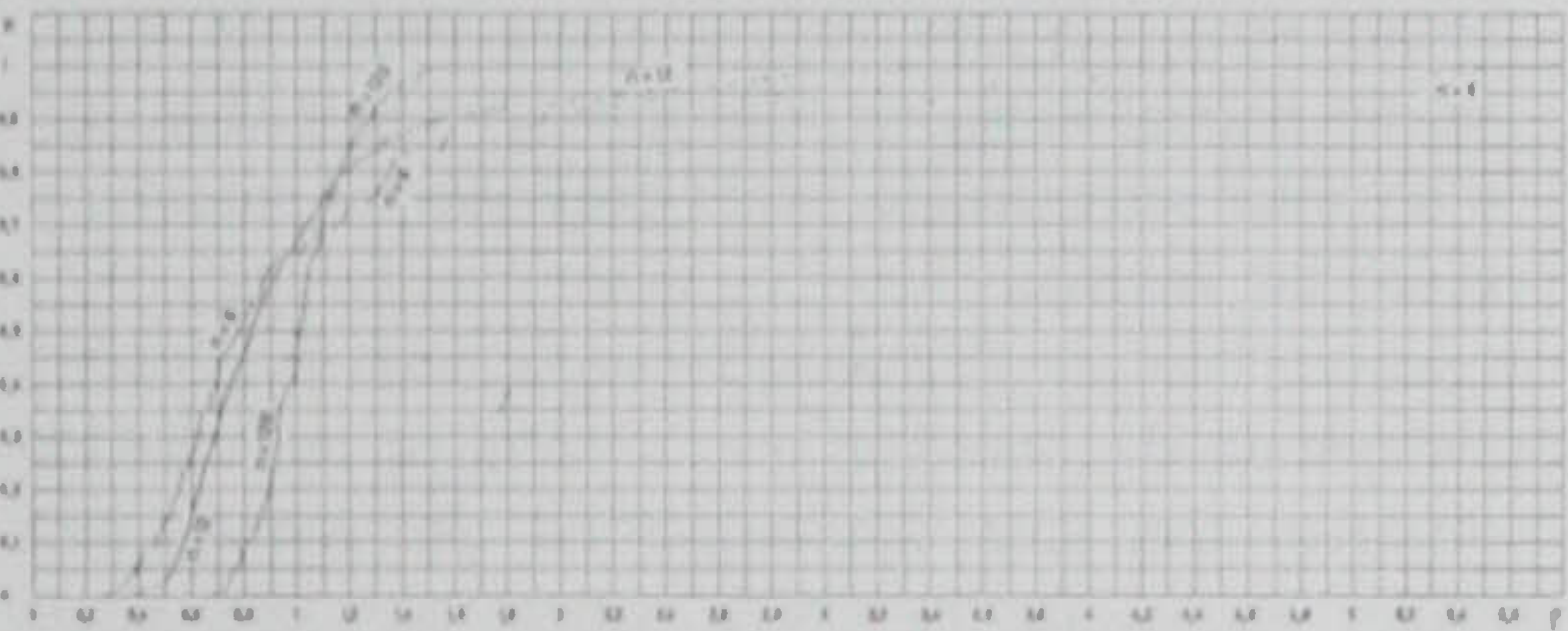


Fig. 11 — Distribuição obtida por amostragem da relação p entre a média de n amostragens e o valor médio dessa média para a estilização da distribuição a.

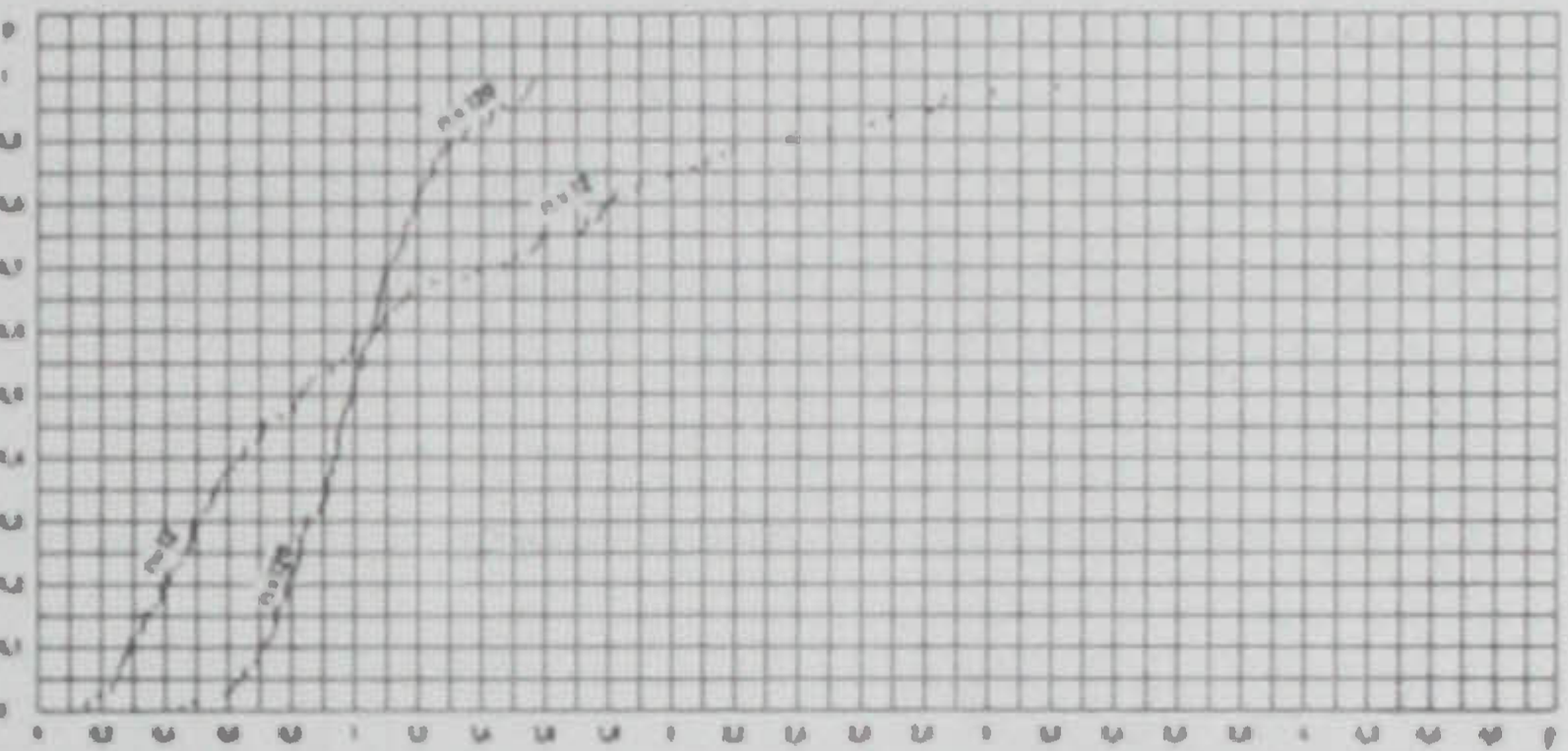


Fig. 12 — Distribuição obtida por amostragem da relação p entre a média de n amostragens e o valor médio dessa média para a estilização b.

Nas figuras 11 e 12 represento as distribuições obtidas para as médias de n amostragens. Para uma fácil comparação das diferentes distribuições, indico seguidamente os valores que, nas distribuições obtidas, correspondem a diversas probabilidades p do valor não ser excedido.

\* Continuação do número anterior.

Nota-se que:

- A média de cerca de 12 amostragens tem uma distribuição estatística que se afasta nitidamente de uma distribuição normal sendo, designadamente, fortemente assimétrica.
- A média de cerca de 120 amostragens tem uma distribuição estatística que não se afasta muito da distribuição normal salvo, naturalmente, para probabilidades  $p$  do valor ser excedido muito pequenas ou muito próximas da unidade.

Os valores obtidos mostram que a média de cerca de 120 amostragens tem uma distribuição tal que permite uma confiança «suficiente» perante o «erro» com que é, em geral, possível calcular o envelhecimento.

### 3.3.3 — Determinação analítica da distribuição da média de $n$ amostragens nas estilizações das distribuições $a$ e $b$

A fim de analisar a exploração analítica do problema, considerou-se para a média de  $n$  amostragens o desenvolvimento em série de Edgeworth

$$f(z) = \varphi(x)$$

$$\begin{aligned} & - \left[ \frac{1}{3!} \frac{\mu_3}{\sigma^3} \varphi^{(3)}(x) \right] \\ & + \left[ \frac{1}{4!} \left( \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \right) \varphi^{(4)}(x) + \frac{10}{6!} \left( \frac{\mu_3}{\sigma^3} \right)^2 \varphi^{(6)}(x) \right] \\ & - \left[ \frac{1}{5!} \left( \frac{\mu_5}{\sigma^5} - 10 \frac{\mu_3}{\sigma^3} \right) \varphi^{(5)}(x) + \frac{35}{7!} \frac{\mu_3}{\sigma^3} \left( \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \right) \varphi^{(7)}(x) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{280}{9!} \left( \frac{\mu_3}{\sigma^3} \right)^3 \varphi^{(9)}(x) \right] \\ & + \dots, \end{aligned}$$

sendo  $x$  a função «normalizada»

$$x = \frac{z - E\{z\}}{\sigma\{z\}}$$

e sendo  $z$  a função em análise,  $E\{z\}$  o seu valor médio provável e  $\sigma\{z\}$  o seu desvio quadrático médio provável. A notação utilizada é definida por H. CRAMER no livro «Mathematical Methods of Statistics», pelo que me dispense de a reproduzir.

Esta série corresponde a um desenvolvimento da função de distribuição na função normal de distribuição e nas suas sucessivas derivadas.

Os termos, com a sequência assinalada, são da ordem das sucessivas potências de  $n^{-1/2}$ .

Registo apenas os resultados obtidos para os desenvolvimentos correspondentes às médias de 12 e 120 amostragens nas duas distribuições consideradas:

#### A) Função de distribuição (densidade de probabilidade)

##### A.1) Média de 12 amostragens na distribuição $a$

$$\begin{aligned} f(z) = & 3,21868\varphi(x) - 1,21763\varphi^{(3)}(x) + 0,87703\varphi^{(4)}(x) + \\ & + 0,23032\varphi^{(6)}(x) - 0,53208\varphi^{(5)}(x) + \dots \end{aligned}$$

sendo

$$x = \frac{12 \cdot z - 6,83540 \cdot 10^{-5}}{3,72823 \cdot 10^{-5}}$$

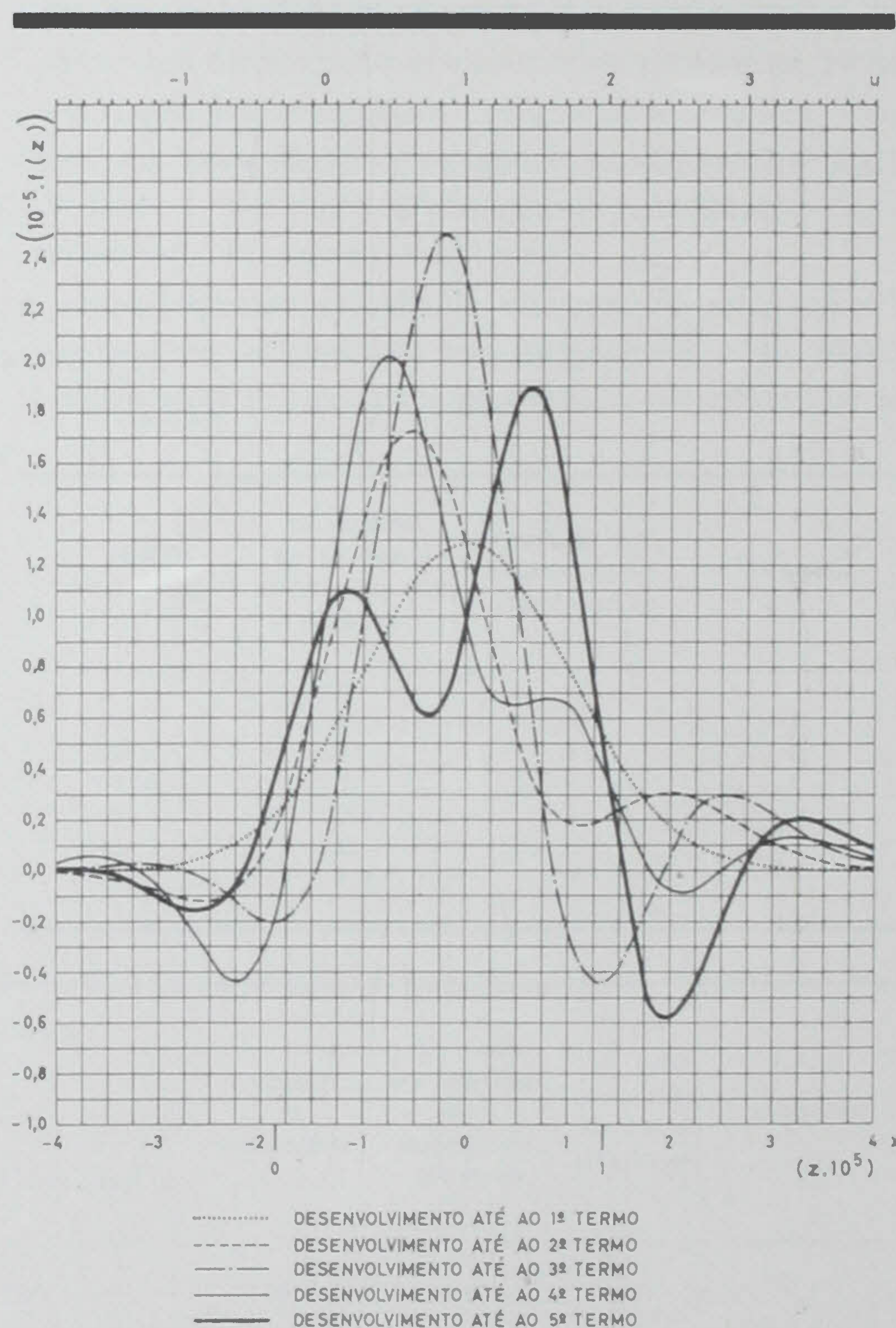


Fig. 13 — Distribuição das médias de envelhecimentos diários de transformadores na amostragem  $a$ ,  $n = 12$ .

Desenvolvimento em série de Edgeworth até ao 1.º termo  $3,21868 \varphi(x)$ ; 2.º termo  $3,21868 \varphi(x) - 1,21763 \varphi^{(3)}(x)$ ; 3.º termo  $3,21868 \varphi(x) - 1,21763 \varphi^{(3)}(x) + 0,87703 \varphi^{(4)}(x)$ ; 4.º termo  $3,21868 \varphi(x) - 1,21763 \varphi^{(3)}(x) + 0,87703 \varphi^{(4)}(x) + 0,23032 \varphi^{(6)}(x)$ ; 5.º termo  $3,21868 \varphi(x) - 1,21763 \varphi^{(3)}(x) + 0,87703 \varphi^{(4)}(x) + 0,23032 \varphi^{(6)}(x) - 0,53208 \varphi^{(5)}(x)$

A.2) Média de 12 amostragens na distribuição  $b$

$$f(z) = 0,921156\varphi(x) - 0,195090\varphi^{(3)}(x) + 0,068500\varphi^{(4)}(x) + \\ + 0,020659\varphi^{(6)}(x) - 0,018945\varphi^{(6)}(x) + \dots$$

sendo

$$x = \frac{12 \cdot z - 17,94560 \cdot 10^{-4}}{13,02712 \cdot 10^{-4}}$$

A.3) Média de 120 amostragens na distribuição  $a$

$$f(z) = 10,17837\varphi(x) - 1,21763\varphi^{(3)}(x) + 0,27734\varphi^{(4)}(x) + \\ + 0,07283\varphi^{(6)}(x) - 0,05321\varphi^{(6)}(x) + \dots$$

sendo

$$x = \frac{120 \cdot z - 68,35403 \cdot 10^{-5}}{11,78966 \cdot 10^{-5}}$$

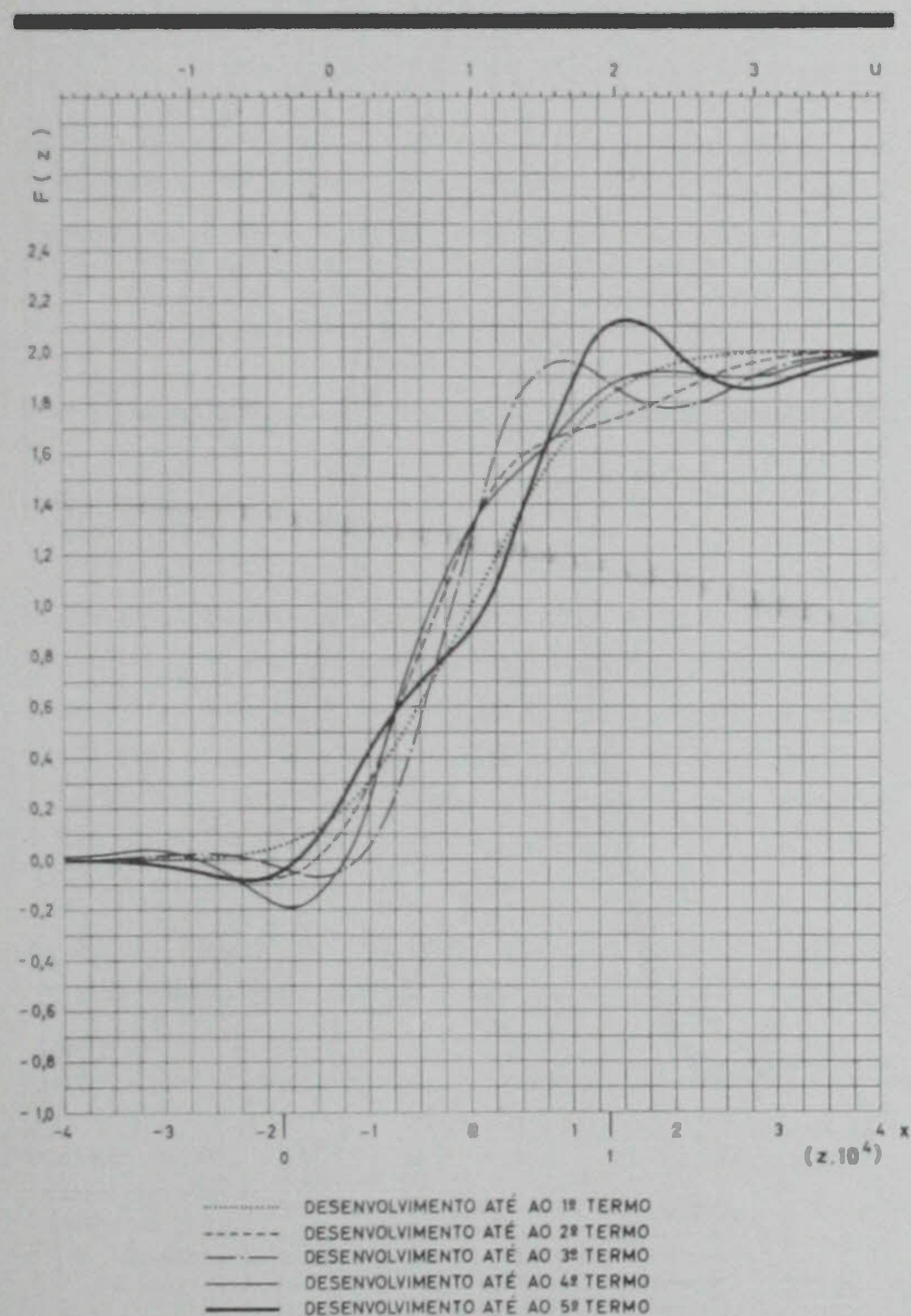


Fig. 14 — Distribuição acumulada das médias de envelhecimentos de transformadores na amostragem  $a$ ,  $n = 12$ .

Desenvolvimento em série de Edgeworth, até ao 1.º termo  $\Phi(x)$ ; 2.º termo  $\Phi(x) - 0,37830 \varphi^{(3)}(x)$ ; 3.º termo  $\Phi(x) - 0,37830 \varphi^{(3)}(x) + 0,27248 \varphi^{(4)}(x)$ ; 4.º termo  $\Phi(x) - 0,37830 \varphi^{(3)}(x) + 0,27248 \varphi^{(4)}(x) + 0,07156 \varphi^{(6)}(x)$ ; 5.º termo  $\Phi(x) - 0,37830 \varphi^{(3)}(x) + 0,27248 \varphi^{(4)}(x) + 0,07156 \varphi^{(6)}(x) - 0,16531 \varphi^{(6)}(x)$ .

A.4) Média de 120 amostragens na distribuição  $b$

$$f(z) = 2,912952\varphi(x) - 0,195090\varphi^{(3)}(x) + 0,021662\varphi^{(4)}(x) + \\ + 0,006533\varphi^{(6)}(x) - 0,001894\varphi^{(6)}(x) + \dots$$

sendo

$$x = \frac{120 \cdot z - 179,455986 \cdot 10^{-4}}{41,195382 \cdot 10^{-4}}$$

B) Função de distribuição acumulada (probabilidade acumulada)

B.1) Média de 12 amostragens na distribuição  $a$

$$F(z) = \Phi(x) - 0,37830\varphi^{(2)}(x) + 0,27248\varphi^{(3)}(x) + \\ + 0,07156\varphi^{(6)}(x) - 0,16531\varphi^{(4)}(x) + \dots$$

sendo

$$x = \frac{12 \cdot z - 6,83540 \cdot 10^{-5}}{3,72823 \cdot 10^{-5}}$$

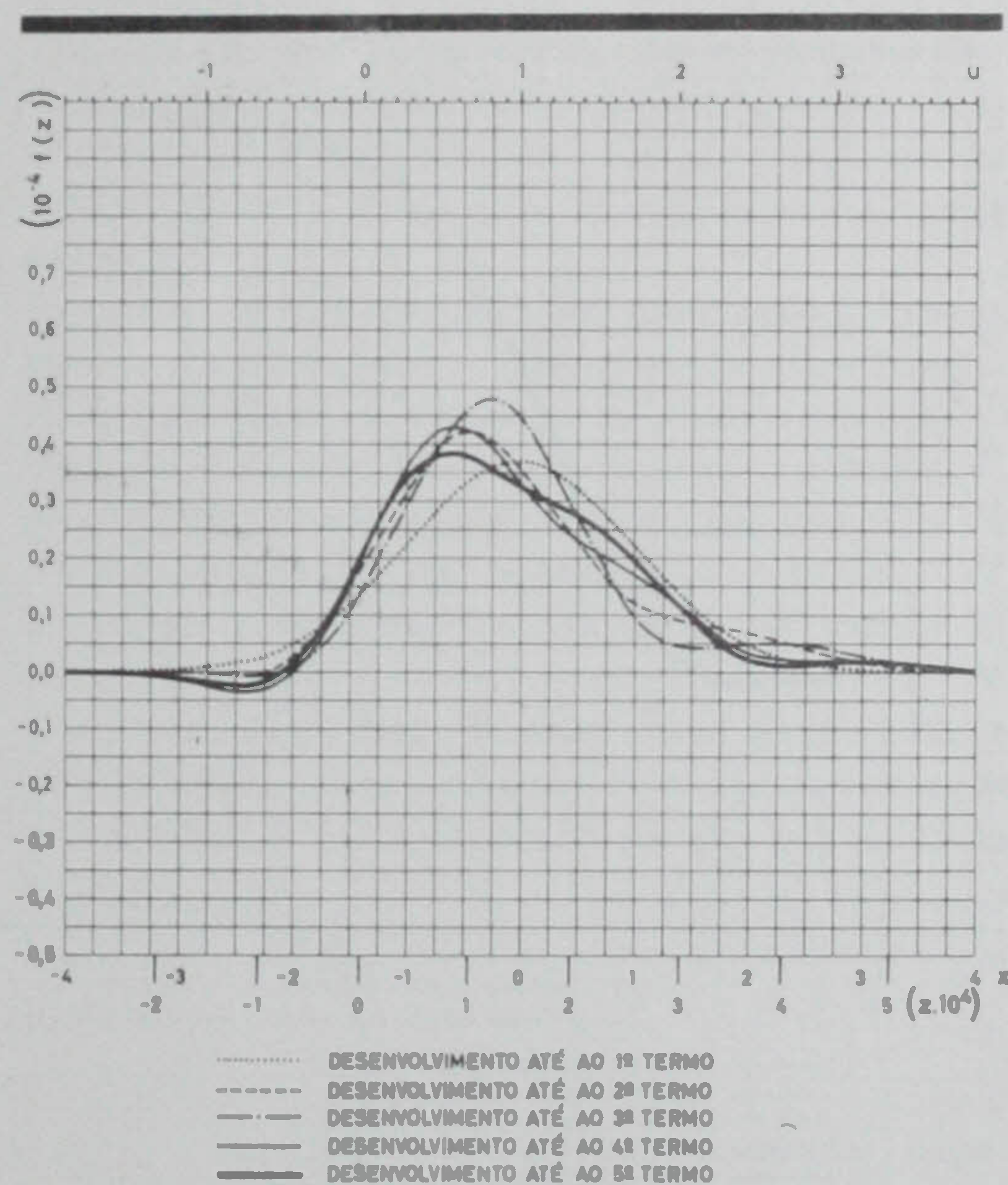


Fig. 15 — Distribuição das médias de envelhecimentos diários de transformadores na amostragem  $b$ ,  $n = 12$ .

Desenvolvimento em série de Edgeworth até ao 1.º termo  $0,92116 \varphi(x)$ ; 2.º termo  $0,92116 \varphi(x) - 0,19509 \varphi^{(3)}(x)$ ; 3.º termo  $0,92116 \varphi(x) - 0,19509 \varphi^{(3)}(x) + 0,06850 \varphi^{(4)}(x)$ ; 4.º termo  $0,92116 \varphi(x) - 0,19509 \varphi^{(3)}(x) + 0,06850 \varphi^{(4)}(x) + 0,02066 \varphi^{(6)}(x)$ ; 5.º termo  $0,92116 \varphi(x) - 0,19509 \varphi^{(3)}(x) + 0,06850 \varphi^{(4)}(x) + 0,02066 \varphi^{(6)}(x) - 0,01894 \varphi^{(6)}(x)$ .

B.2) Média de 12 amostragens na distribuição  $b$

$$F(z) = \Phi(x) - 0,211789\varphi^{(2)}(x) + 0,074363\varphi^{(3)}(x) + \\ + 0,022427\varphi^{(5)}(x) - 0,020566\varphi^{(4)}(x) + \dots$$

sendo

$$x = \frac{12 \cdot z - 17,94560 \cdot 10^{-4}}{13,02712 \cdot 10^{-4}}$$

B.3) Média de 120 amostragens na distribuição  $a$

$$F(z) = \Phi(x) - 0,119630\varphi^{(2)}(x) + 0,027248\varphi^{(3)}(x) + \\ + 0,007156\varphi^{(5)}(x) - 0,005227\varphi^{(4)}(x) + \dots$$

sendo

$$x = \frac{120 \cdot z - 68,35403 \cdot 10^{-5}}{11,78966 \cdot 10^{-5}}$$

B.4) Média de 120 amostragens na distribuição  $b$

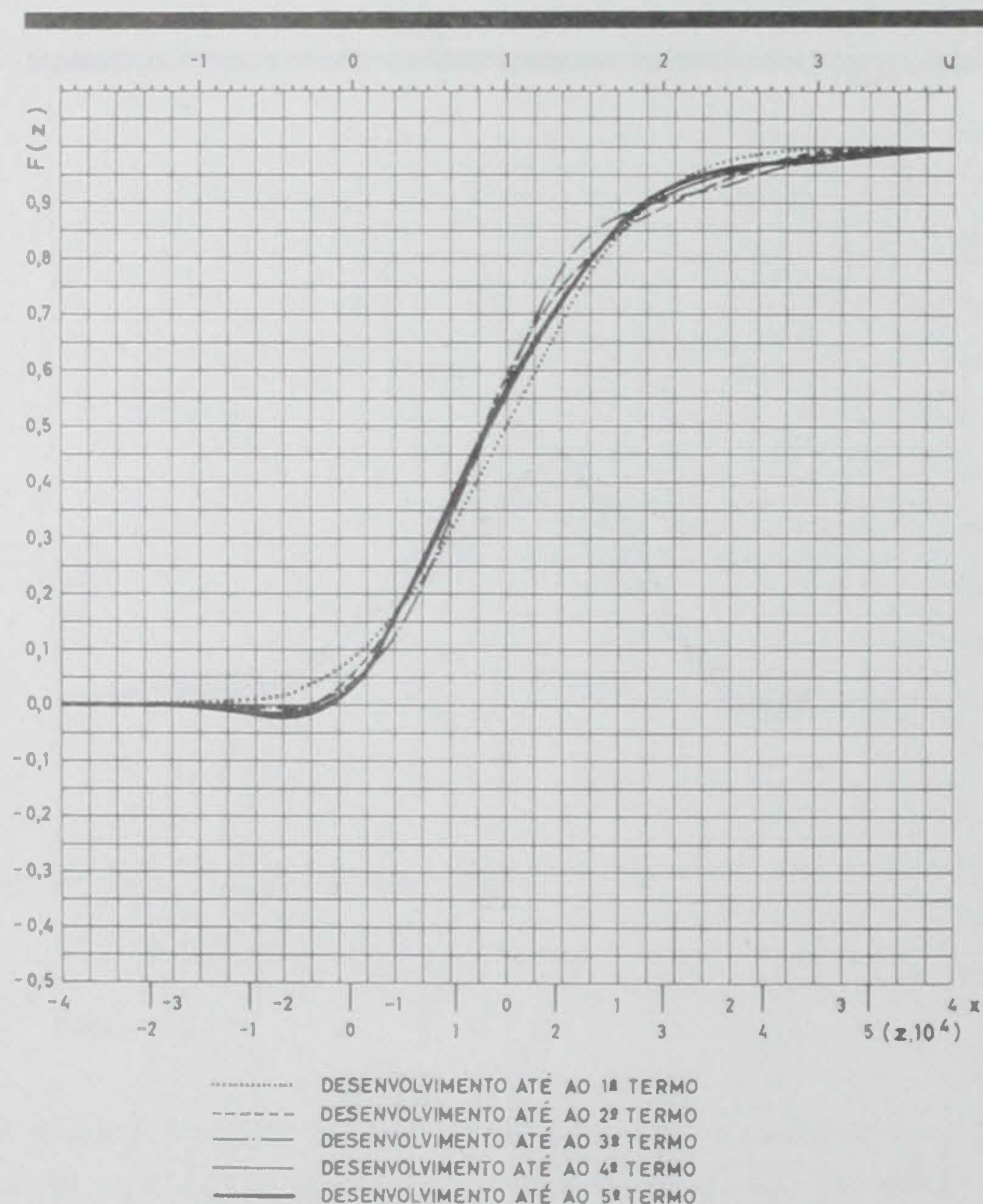


Fig. 16 — Distribuição acumulada das médias de envelhecimentos de transformadores na amostragem  $b$ ,  $n = 12$ .

Desenvolvimento em série de Edgeworth, até ao 1.º termo  $\Phi(x)$ ; 2.º termo  $\Phi(x) - 0,21179 \varphi^{(2)}(x)$ ; 3.º termo  $\Phi(x) - 0,21179 \varphi^{(2)}(x) + 0,07436 \varphi^{(3)}(x)$ ; 4.º termo  $\Phi(x) - 0,21179 \varphi^{(2)}(x) + 0,07436 \varphi^{(3)}(x) + 0,02243 \varphi^{(5)}(x)$ ; 5.º termo  $\Phi(x) - 0,21179 \varphi^{(2)}(x) + 0,07436 \varphi^{(3)}(x) + 0,02243 \varphi^{(5)}(x) - 0,020566 \varphi^{(4)}(x)$ .

$$F(z) = \Phi(x) - 0,066973\varphi^{(2)}(x) + 0,007436\varphi^{(3)}(x) + \\ + 0,002243\varphi^{(5)}(x) - 0,000650\varphi^{(4)}(x) + \dots$$

sendo

$$x = \frac{120 \cdot z - 179,455986 \cdot 10^{-4}}{41,195382 \cdot 10^{-4}}$$

Nas figuras 13 a 20 fez-se a representação correspondente à consideração progressiva das diversas parcelas do desenvolvimento.

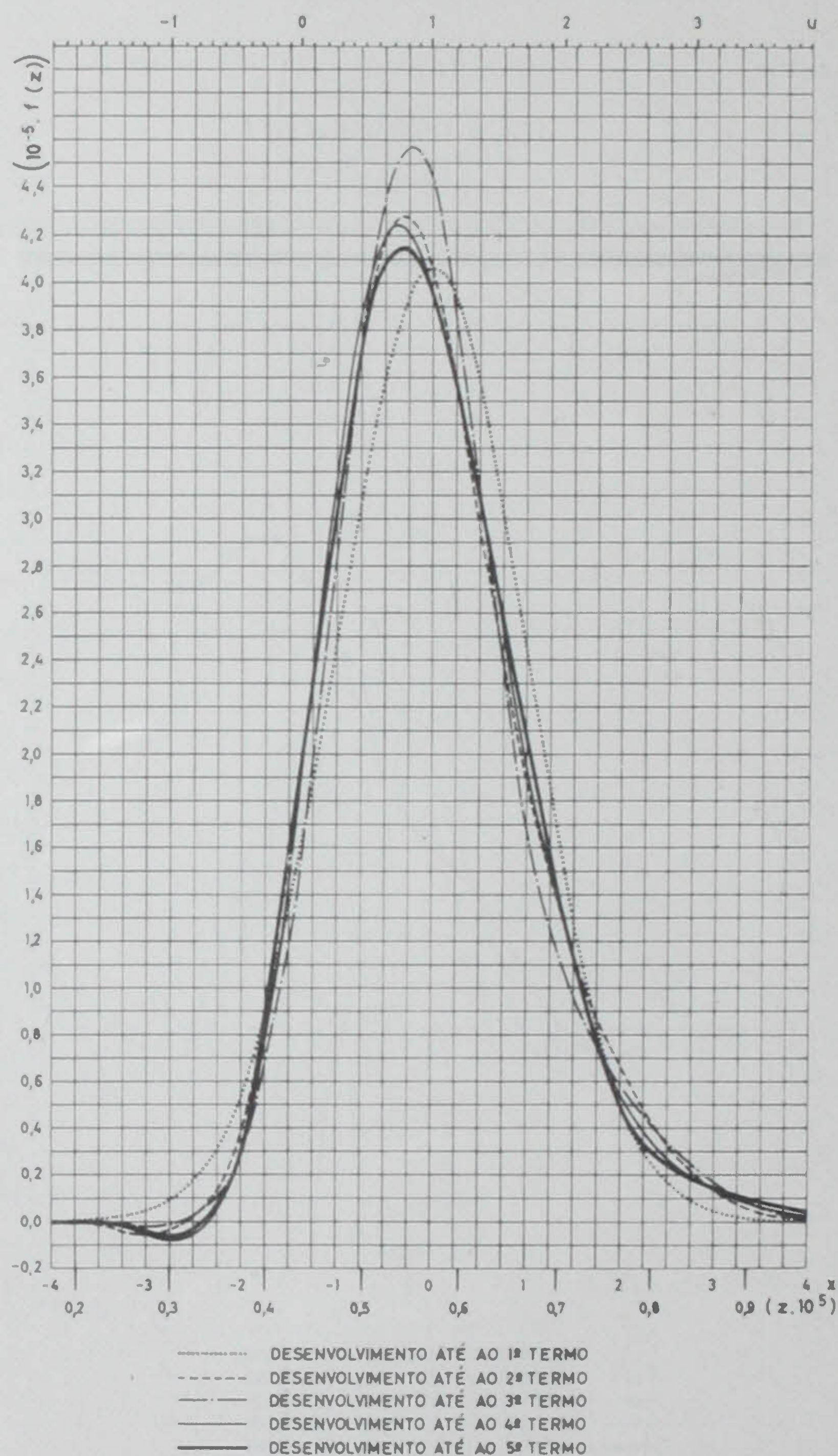


Fig. 17 — Distribuição das médias de envelhecimentos diários de transformadores na amostragem  $a$ ,  $n = 120$ .

Desenvolvimento em série de Edgeworth até ao 1.º termo  $10,17837 \varphi(x)$ ; 2.º termo  $10,17837 \varphi(x) - 1,21763 \varphi^{(2)}(x)$ ; 3.º termo  $10,17837 \varphi(x) - 1,21763 \varphi^{(2)}(x) + 0,27734 \varphi^{(4)}(x)$ ; 4.º termo  $10,17837 \varphi(x) - 1,21763 \varphi^{(2)}(x) + 0,27734 \varphi^{(4)}(x) + 0,072834 \varphi^{(6)}(x)$ ; 5.º termo  $10,17837 \varphi(x) - 1,21763 \varphi^{(2)}(x) + 0,27734 \varphi^{(4)}(x) + 0,07283 \varphi^{(6)}(x) - 0,05321 \varphi^{(8)}(x)$ .

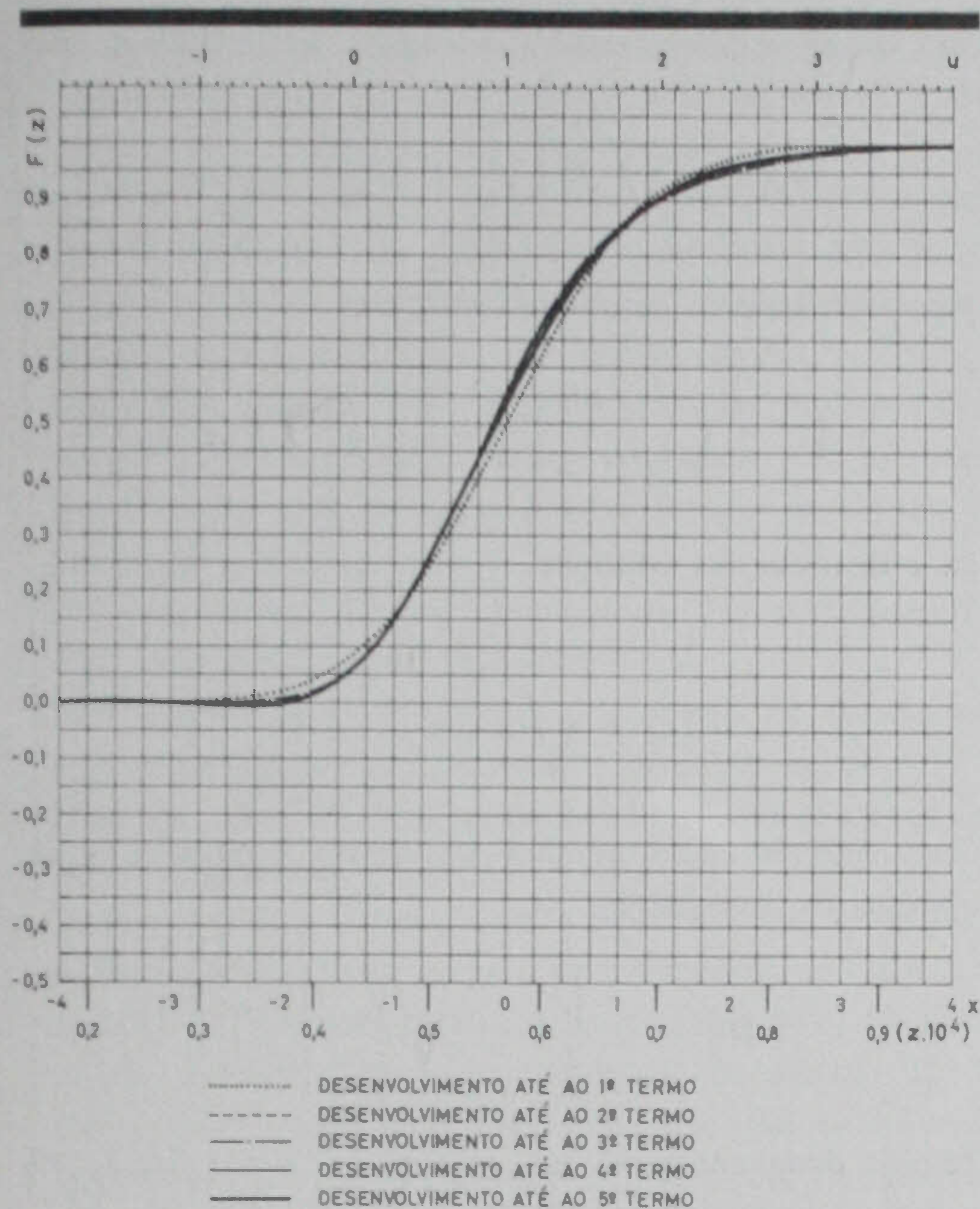


Fig. 18 — Distribuição acumulada das médias de envelhecimento de transformadores na amostragem a,  $n = 120$ .

Desenvolvimento em série de Edgeworth, até ao 1.º termo  $\Phi(x)$ ; 2.º termo  $\Phi(x) - 0,11963 \varphi^{(2)}(x)$ ; 3.º termo  $\Phi(x) - 0,11963 \varphi^{(2)}(x) + 0,02725 \varphi^{(3)}(x)$ ; 4.º termo  $\Phi(x) - 0,11963 \varphi^{(2)}(x) + 0,02725 \varphi^{(3)}(x) + 0,00716 \varphi^{(4)}(x)$ ; 5.º termo  $\Phi(x) - 0,11963 \varphi^{(2)}(x) + 0,02725 \varphi^{(3)}(x) + 0,00716 \varphi^{(4)}(x) - 0,00523 \varphi^{(5)}(x)$ .

Nota-se que:

- Para a média de 12 amostragens o desenvolvimento converge muito lentamente e só bastante grosseiramente pode ser utilizado. É notória, designadamente, a insuficiência correspondente a densidades de probabilidade negativas de módulo apreciável, mesmo para o maior número de termos que se considerou.
- Para a média de 120 amostragens, a convergência do desenvolvimento em série de Edgeworth é já razoável,

embora seja ainda sensível a insuficiência correspondente a densidades de probabilidade negativas.

Para facilidade de comparação com os resultados obtidos por simulação, e referidos em 3.3.2, representa-se nas figs. 13 a 20 a escala correspondente a valor médio unitário (variável  $u$ ).

Indico também no quadro seguinte o valor da média associado a diversos valores de  $p$ , probabilidade de não ser excedido, tomando como unidade o valor médio, para os desenvolvimentos com o maior número de termos calculados.

Nota-se uma concordância satisfatória entre os dois métodos, principalmente para  $n = 120$ .

Para reduzidos valores de  $n$ , dada a «má» convergência de série e a rapidez de simulação com o programa atrás mencionado, a utilização deste afigura-se preferível.

### 3.4 — ERRO DA ESTIMATIVA DE DISTRIBUIÇÃO DOS ENVELHECIMENTOS DIÁRIOS OBTIDA NUMA AMOSTRAGEM

A média dos envelhecimentos diários é, sob diversos aspectos, a grandeza de maior interesse a obter nos cálculos de envelhecimento. O erro da estimativa dessa média obtida numa amostragem foi analisado na posição 3.3 com relativo pormenor.

Têm também interesse, no entanto, outros elementos fornecidos pela amostragem, designadamente a estimativa da distribuição dos envelhecimentos diários. Desta forma, há que estabelecer a distribuição de erro associado a essa estimativa.

Este problema é caracterizado pela distribuição binominal, pois, conforme aliás foi tratado no artigo «Considerações Preliminares sobre a Utilização de Amostragens Estatísticas em Problemas de Redes Eléctricas», é redutível ao problema de conhecer a lei de probabilidade  $p(x)$  de, numa amostragem de  $n$  valores, se obterem  $x$  superiores a  $\epsilon$ , em função da proporção de valores da distribuição superiores a  $\epsilon$ .

Com efeito, a distribuição binomial traduz a probabilidade  $p(x)$  de, numa amostra ao acaso de  $n$  objectos com equiprobabilidade de todos os objectos da «população», e com

| Refe-<br>rência | Tipo de<br>distribuição<br>objecto da<br>amostragem | Número de<br>elementos em<br>cada<br>amostragem<br>da média | Valores da média correspondentes à probabilidade $p$ de não serem<br>excedidos, tomando como unidade o valor médio das distribuições |            |           |           |           |           |           |            |            |
|-----------------|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|
|                 |                                                     |                                                             | $p = 0,01$                                                                                                                           | $p = 0,05$ | $p = 0,1$ | $p = 0,2$ | $p = 0,5$ | $p = 0,8$ | $p = 0,9$ | $p = 0,95$ | $p = 0,99$ |
| 1               | a                                                   | 12                                                          |                                                                                                                                      | 0,18489    | 0,27525   | 0,43726   | 1,07495   | 1,30080   | 1,48943   | 1,54636    |            |
| 2               | a                                                   | 120                                                         | 0,68634                                                                                                                              | 0,74778    | 0,79075   | 0,84954   | 0,98186   | 1,13716   | 1,22507   | 1,30713    | 1,50681    |
| 3               | b                                                   | 12                                                          |                                                                                                                                      | 0,00338    | 0,13306   | 0,34100   | 0,88114   | 1,56273   | 1,89762   | 2,22803    | 3,46268    |
| 4               | b                                                   | 120                                                         | 0,53066                                                                                                                              | 0,64801    | 0,71517   | 0,80222   | 0,98502   | 1,18866   | 1,30243   | 1,40106    | 1,60190    |

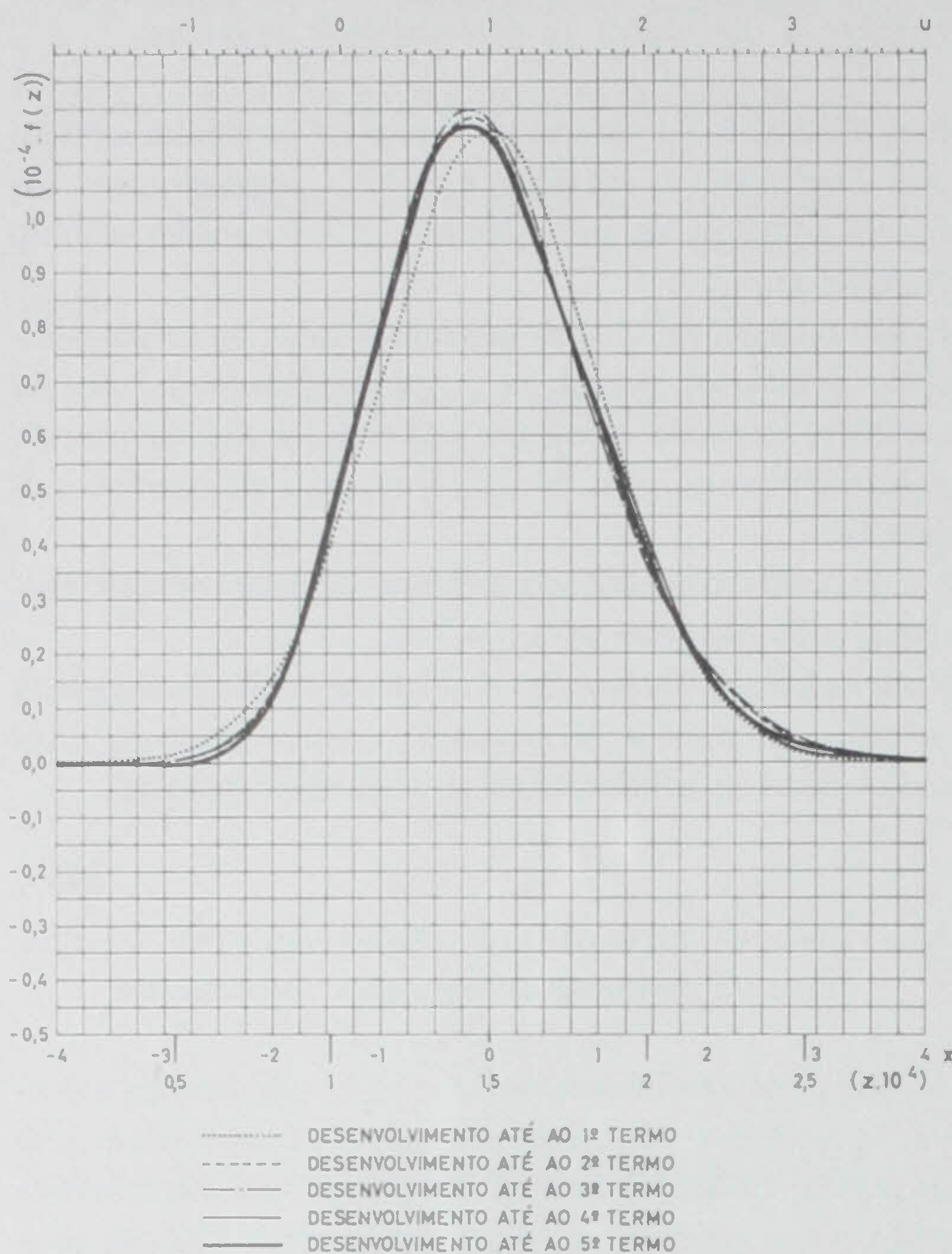


Fig. 19 — Distribuição das médias de envelhecimentos diários de transformadores na amostragem b, n = 120.

Desenvolvimento em série de Edgeworth, até ao 1.º termo  $2,91295 \varphi(x)$ ; 2.º termo  $2,91295 \varphi(x) - 0,19509 \varphi^{(3)}(x)$ ; 3.º termo  $2,91295 \varphi(x) - 0,19509 \varphi^{(3)}(x) + 0,02166 \varphi^{(4)}(x)$ ; 4.º termo  $2,91295 \varphi(x) - 0,19509 \varphi^{(3)}(x) + 0,02166 \varphi^{(4)}(x) + 0,006533 \varphi^{(5)}(x)$ ; 5.º termo  $2,91295 \varphi(x) - 0,19509 \varphi^{(3)}(x) + 0,02166 \varphi^{(4)}(x) + 0,006533 \varphi^{(5)}(x) - 0,001894 \varphi^{(6)}(x)$ .

substituição, se obterem exactamente  $x$  objectos satisfazendo a determinada condição, sendo  $v$  a proporção dos objectos da «população» considerada que satisfazem a essa condição.

Tem-se

$$p(x) = \binom{n}{x} v^x (1-v)^{n-x},$$

representando por  $\binom{n}{x}$  o «coeficiente binomial».

Seja  $E\{x\}$  o valor médio «provável» de  $x$ , definido por

$$E\{x\} = \sum_x x p(x)$$

para distribuições descontínuas e por

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

para distribuições contínuas.

É

$$E\{x\} = n v.$$

Seja  $\sigma\{x\}$  o desvio quadrático médio de  $x$ , definido por

$$\sigma\{x\} = \sqrt{\sum_x [x - E\{x\}]^2 \cdot p(x)}$$

para distribuições descontínuas, e por

$$\sigma\{x\} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [x - E\{x\}]^2 \cdot p(x) dx}$$

para distribuições contínuas.

Tem-se

$$\sigma\{x\} = \sqrt{n \cdot v \cdot (1-v)}$$

Considerando como unidade de desvio o número  $n$  de objectos da amostragem, virá

$$\tau\{x\} = \frac{\sigma\{x\}}{n} = \sqrt{\frac{v \cdot (1-v)}{n}}$$

Têm-se designadamente, os valores de  $\tau$  em função de  $n$  e de  $v$  indicados na fig. 21.

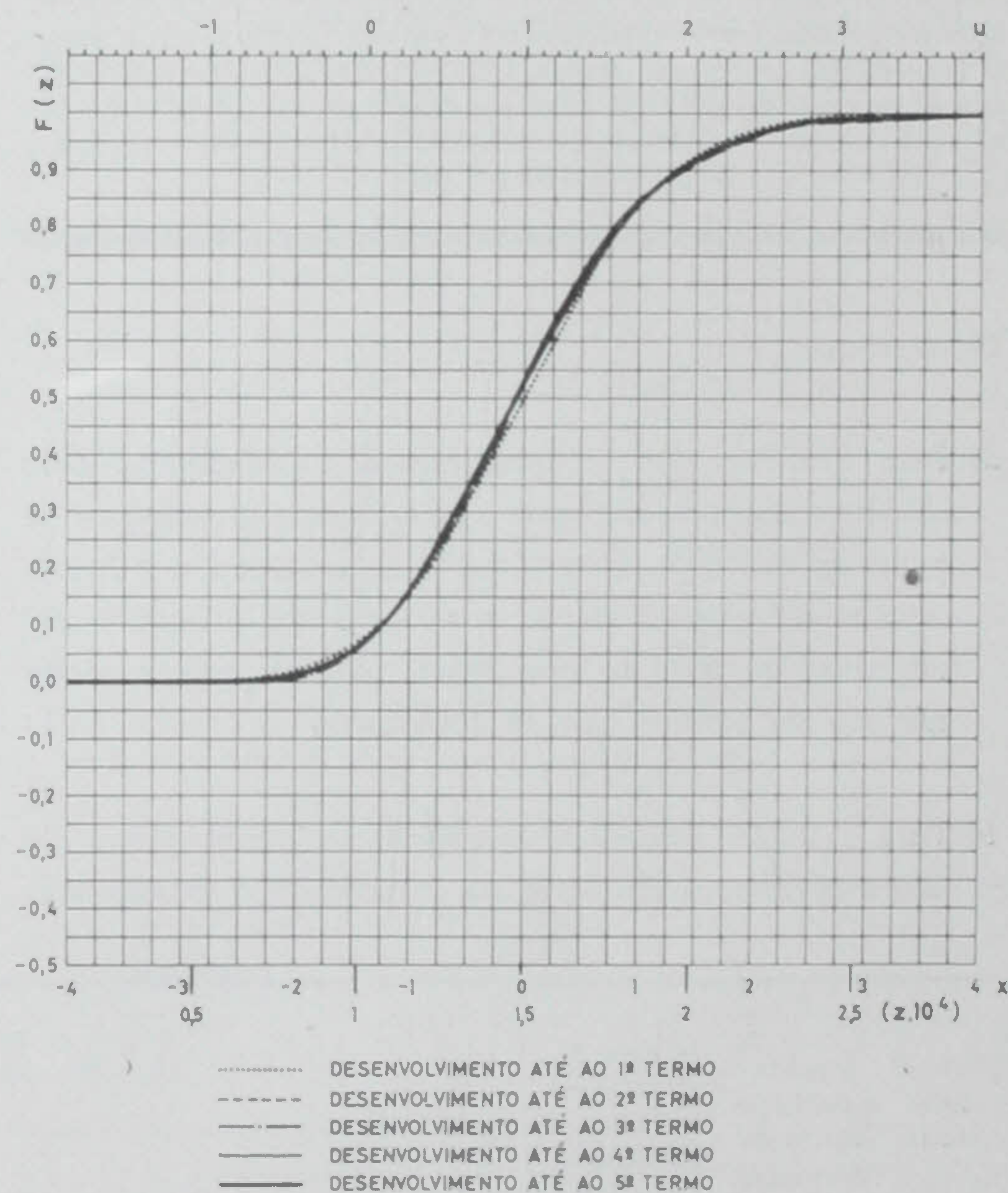


Fig. 20 — Distribuição acumulada das médias de envelhecimento de transformadores na amostragem b, n = 120.

Desenvolvimento em série de Edgeworth até ao 1.º termo  $\Phi(x)$ ; 2.º termo  $\Phi(x) - 0,06697 \varphi^{(3)}(x)$ ; 3.º termo  $\Phi(x) - 0,06697 \varphi^{(3)}(x) + 0,00744 \varphi^{(4)}(x)$ ; 4.º termo  $\Phi(x) - 0,06697 \varphi^{(3)}(x) + 0,00744 \varphi^{(4)}(x) + 0,00224 \varphi^{(5)}(x)$ ; 5.º termo  $\Phi(x) - 0,06697 \varphi^{(3)}(x) + 0,00744 \varphi^{(4)}(x) + 0,00224 \varphi^{(5)}(x) - 0,00065 \varphi^{(6)}(x)$ .

Para valores elevados de  $n$ , a distribuição binomial tende assintoticamente para uma distribuição de GAUSS, caracterizada por um desvio quadrático médio  $\sigma = \sqrt{n v (1-v)}$  e por um valor médio igual ao valor médio da distribuição binomial (teorema do limite de DE MOIVRE-LAPLACE).

A aproximação gausseana é em geral satisfatória para valores de  $\sigma$  superiores ou da ordem de 3.

Dado que, como se concluiu, tem interesse trabalhar com valores de  $n$  moderados, há que considerar valores moderados de  $x$ , para os quais a aproximação gausseana da distribuição binomial não é suficiente.

Por este motivo, elaborei um programa que calcula o valor  $p(x)$  atrás indicado, em função de  $x$  e de  $v$ .

Para concretização e aplicação numérica fiz os cálculos correspondentes a amostragens de 12 e 120 valores.

Nas figs. 22 e 23 faço a representação gráfica correspondente a estas distribuições.

Para  $n = 120$  a diferença entre a distribuição binomial e a distribuição gausseana, para probabilidades de ocorrência apreciáveis, é sensível apenas para valores de  $x$  inferiores ou da ordem de 20 ou superiores ou da ordem de 100. Desta forma, efectuei o cálculo da distribuição binomial apenas para  $x \leq 24$ ; atendendo à simetria das distribuições correspondentes a  $n$  e a  $n - x$ , ficam também definidas as distribuições binomiais para  $x \geq 96$ .

Para valores de  $x$  compreendidos entre 25 e 95 é suficiente considerar, salvo para valores muito reduzidos de probabilidade, a aproximação gausseana, que, como se viu, é caracterizada por um valor médio provável

$$E\{x\} = n v$$

e por um desvio quadrático médio,

$$\sigma\{x\} = \sqrt{n v (1-v)}.$$

Na fig. 24 indico, para  $n = 12, 120, 1200$ , e em função de  $v$ , o desvio quadrático médio  $\sigma(x)$  válido quer para a distribuição binomial quer para a correspondente aproximação gausseana.

A análise dos resultados anteriores permite concluir que, para a generalidade das aplicações, a estimativa da distribuição dos envelhecimentos diários obtida com cerca de 120 amostragens é satisfatória. Designadamente, o erro quadrático médio, para o valor de probabilidade 0,5, é 5,48, isto é, há uma probabilidade da ordem de 0,68 de o valor cuja probabilidade de ser excedido é 0,50 estar compreendido entre o 55.º e 65.º valores do envelhecimento na amostragem.

### 3.5 — DETECÇÃO DE VALORES SATISFAZENDO A DETERMINADA CONDIÇÃO

Para diversos efeitos, interessa conhecer a probabilidade associada à detecção, na amostragem, de valores satisfa-

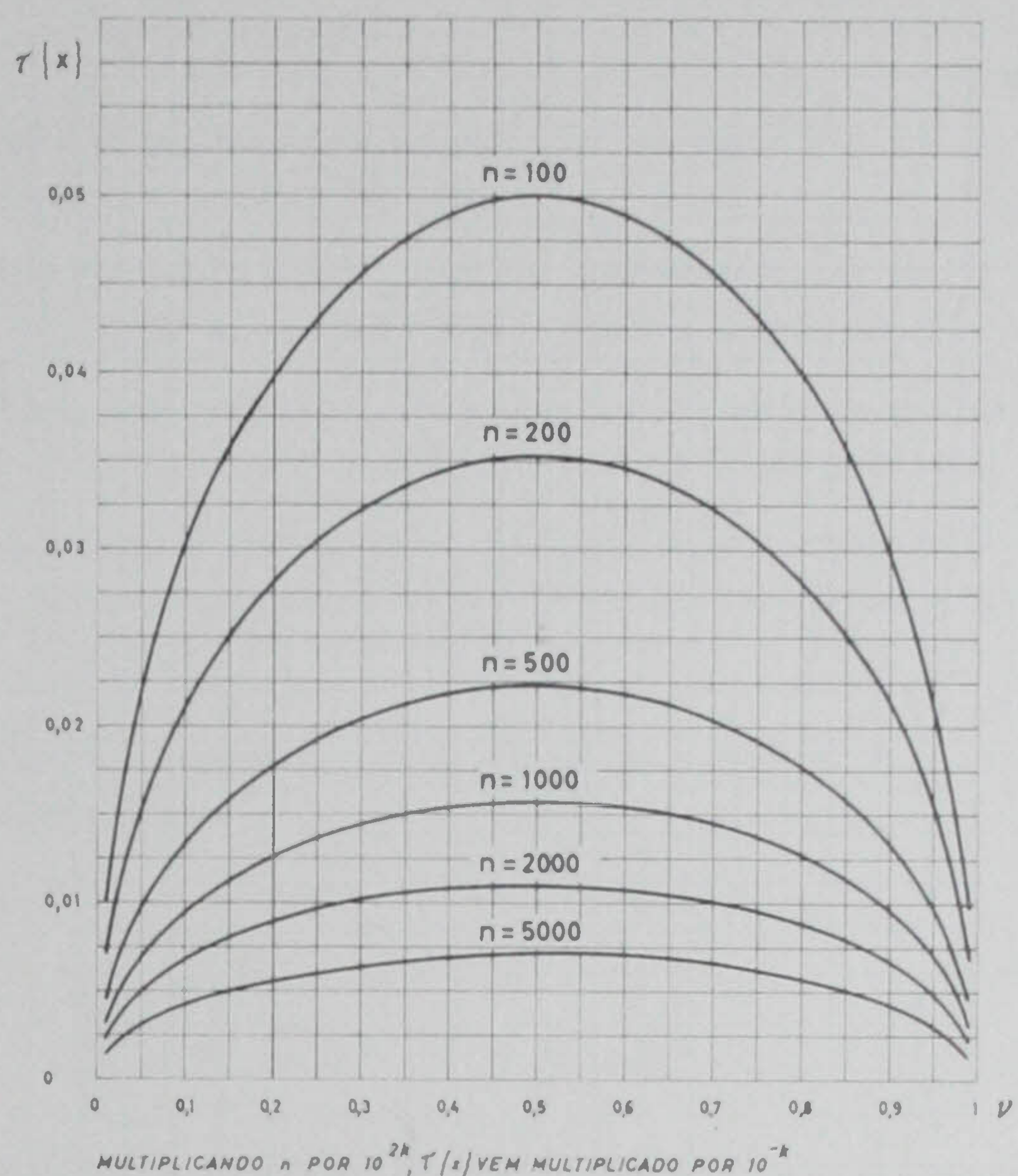


Fig. 21 — Relação  $\tau\{x\} = \frac{\sigma\{x\}}{n} = f(v, n)$ , numa distribuição binomial, sendo:  $n$  o número de elementos de uma amostragem,  $v$  o valor médio provável de  $x$ ,  $\sigma\{x\}$  o desvio quadrático médio de  $x$ .

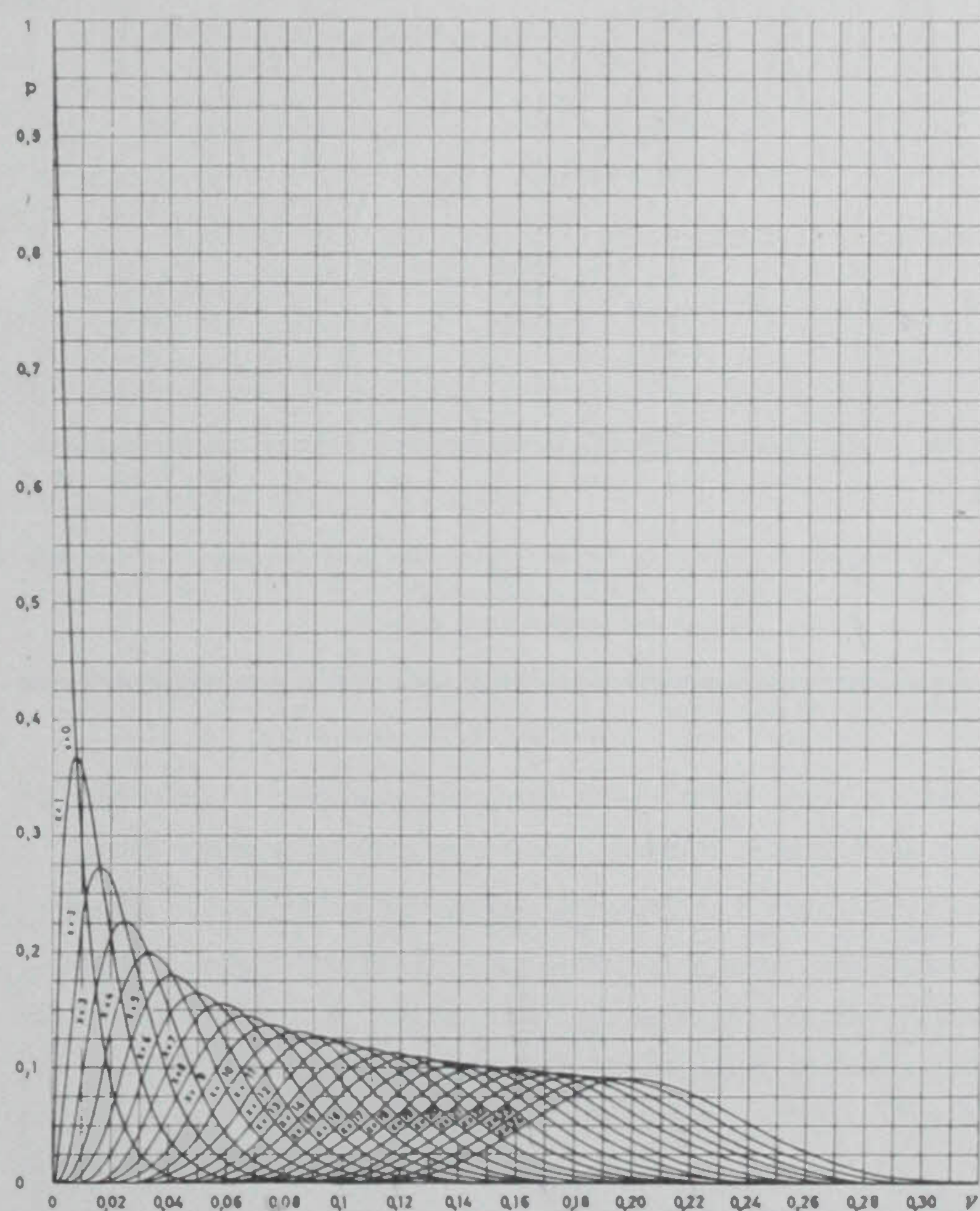


Fig. 22 — Distribuição binomial  $p(x) = \binom{n}{x} v^x (1-v)^{n-x}$  para  $n = 120$ , em função de  $x$  e de  $v$ .

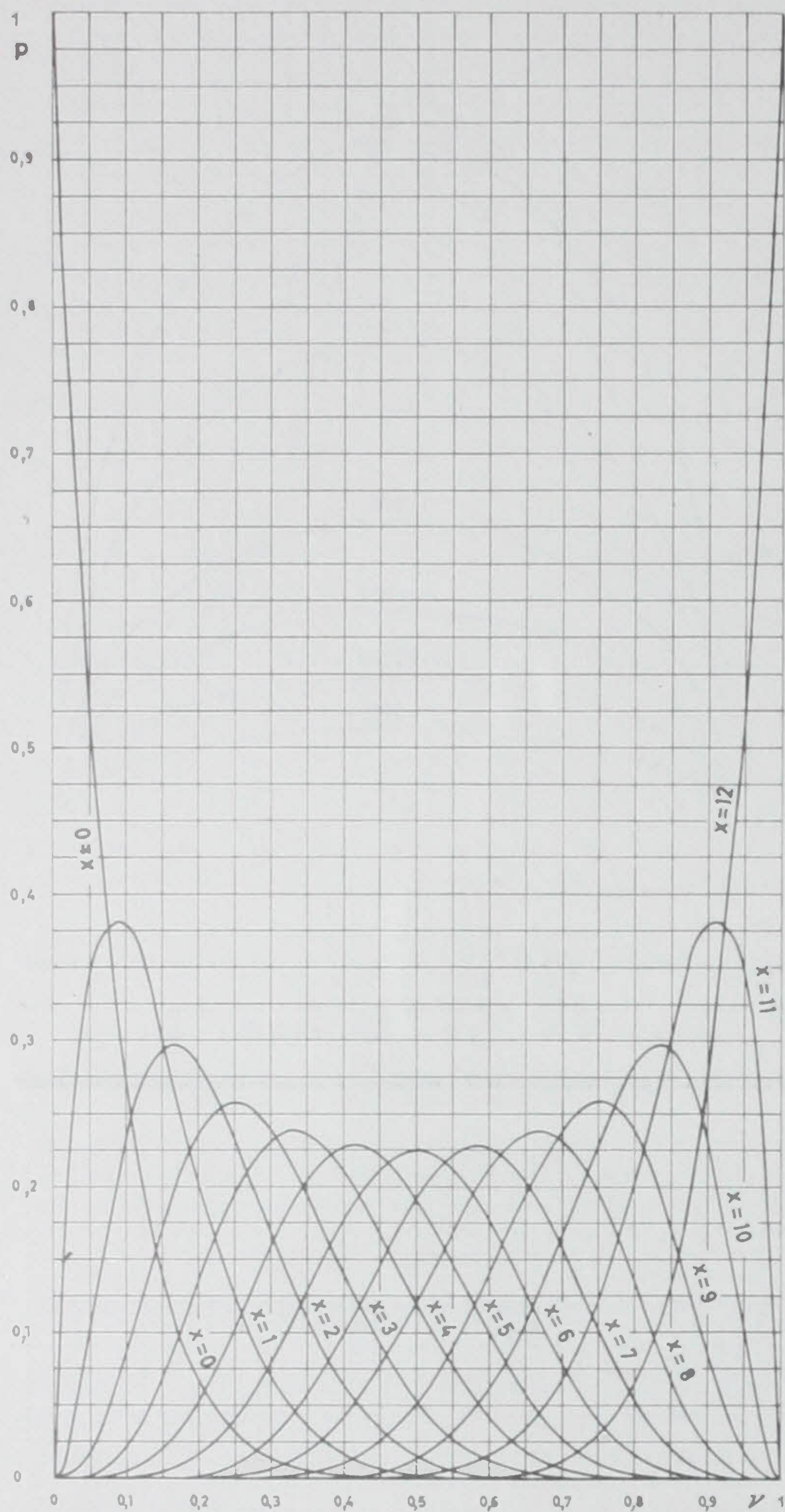


Fig. 23 — Distribuição binomial  $p(x) = \binom{n}{x} v^x (1-v)^{n-x}$  para  $n = 12$ , em função de  $x$  e de  $v$ .

zendo a uma certa condição, por exemplo, a detecção de envelhecimentos diários superiores a determinado valor.

Este problema é redutível à análise feita na posição anterior. Com efeito, seja  $v$  a proporção de valores que, na população, satisfaz à condição em causa. A probabilidade de esses valores não serem detectados é a probabilidade de, na amostragem, a sua ocorrência ser nula, o que é o caso da distribuição binomial para  $x = 0$ , referida e concretizada em 3.4.

Por exemplo, têm-se as seguintes probabilidades  $p$  de numa amostragem de 120 objectos não obter nenhum de um conjunto cuja proporção na população seja  $v$ .

| $v$   | $p$                     |
|-------|-------------------------|
| 0,005 | 0,5480                  |
| 0,010 | 0,2998                  |
| 0,016 | 0,1631                  |
| 0,02  | 0,08854                 |
| 0,03  | 0,02586                 |
| 0,04  | 0,007457                |
| 0,05  | 0,002122                |
| 0,08  | 0,0005981               |
| 0,07  | 0,0001852               |
| 0,08  | 0,00004514              |
| 0,09  | 0,00001218              |
| 0,10  | 0,000003229             |
| 0,20  | $0,2349 \cdot 10^{-11}$ |
| 0,30  | $0,2581 \cdot 10^{-18}$ |
| 0,40  | $0,2389 \cdot 10^{-26}$ |
| 0,50  | $0,7523 \cdot 10^{-36}$ |

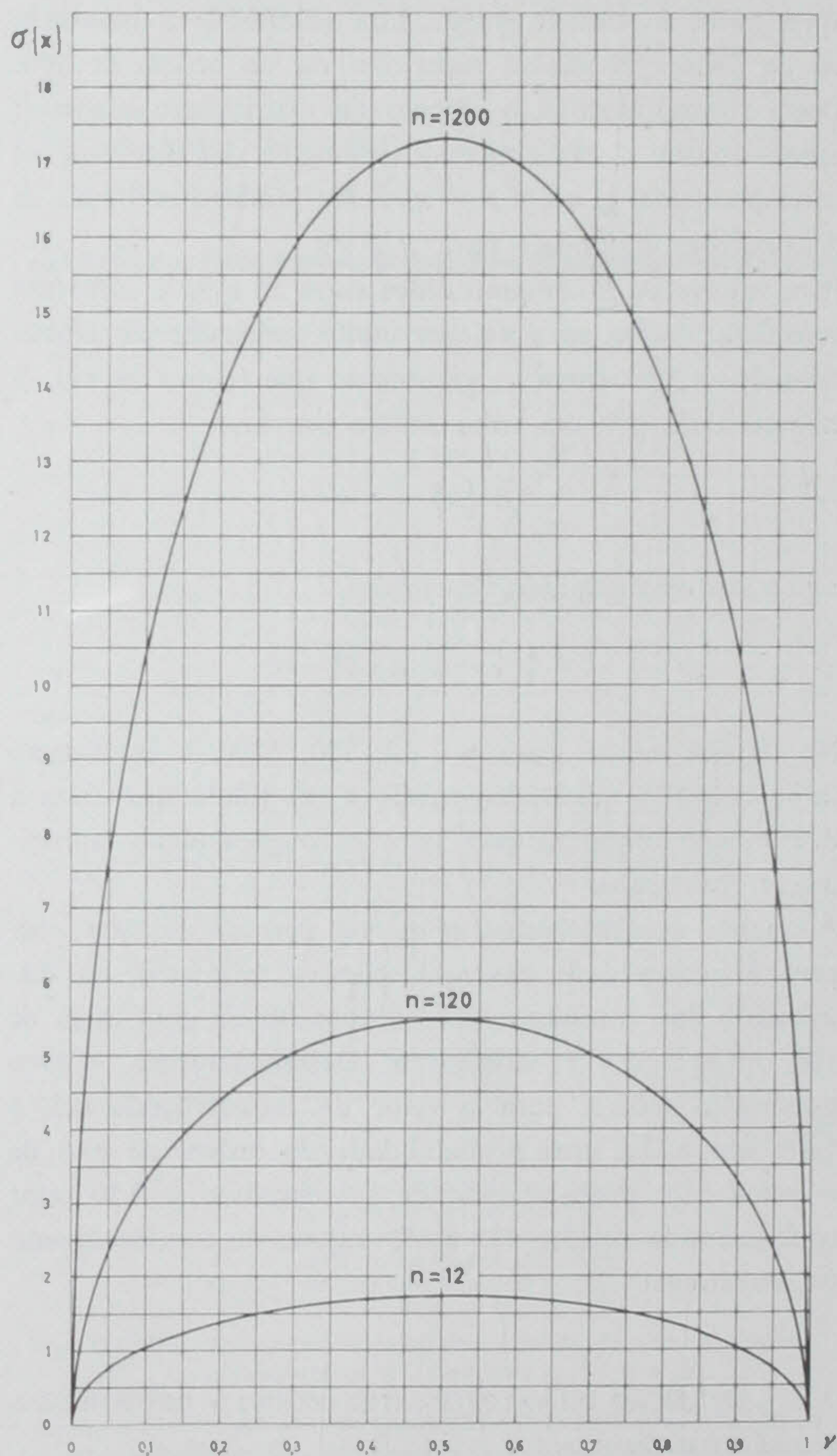


Fig. 24 — Desvio quadrático médio  $\sigma\{x\}$  numa distribuição binomial  $p\{x\} = \binom{n}{x} v^x (1-v)^{n-x}$ .

3.6 — CONCLUSÕES

A análise feita permite concretizar quantitativamente os resultados da aplicação de métodos de amostragem à análise de envelhecimentos, de molde a:

- a) Estabelecer a «confiança» que se pode atribuir ao valor do envelhecimento médio obtido numa amostragem.
- b) Determinar o número de amostragens necessário para determinado nível de «confiança».
- c) Estabelecer o «erro» associado a diversos elementos obtidos da amostragem.
- d) Determinar o número de amostragens para obter determinada «precisão» em diversos elementos resultantes da amostragem.

Como indicação genérica, que, naturalmente, convém só aplicar com prudência, pode estimar-se em cerca de 120 o número de amostragens diárias adequado para cálculos de envelhecimento de transformadores.

4 — RELAÇÃO ENTRE O ENVELHECIMENTO E A «PROPORÇÃO» DE CARGA EM CONDIÇÕES DE BASE

4.0 — INTRODUÇÃO

Na posição 2 foram indicados os resultados obtidos por amostragem, para o exemplo e conjunto de hipóteses aí definidas.

Da ponderação dos valores obtidos e da análise de erros feita, parcialmente descrita na posição 3, concluí ser adequado considerar como base a média das amostragens 5, 6 e 9.

Para utilização dos resultados, julguei conveniente considerar uma aproximação funcional, que permitisse uma interpolação segura e uma extrapolação razoavelmente fundamentada. Passo a descrever alguns dos resultados obtidos.

4.1 — TIPO DE FUNÇÃO INTERPOLADORA UTILIZADA

Pela análise dos resultados, concluí ser conveniente uma interpolação por meio de função da forma

$$\epsilon = a \cdot e^{b \cdot f^\rho}$$

sendo *a*, *b* e *ρ* parâmetros a determinar numericamente. Desta forma, elaborei um programa que, dada uma tabela de valores de *f* e *ε*, calcula, para pares de valores de *b* e *ρ*, o valor de *a* que conduz a valor mínimo do valor quadrático médio do desvio relativo da função interpoladora.

4.2 — FUNÇÕES INTERPOLADORAS CORRESPONDENTES A DIVERSAS HIPÓTESES

Apliquei o programa anterior aos resultados correspondentes às seguintes hipóteses:

- a) Amostragem n.º 6, que, das dez amostragens de 12 dias, foi a que conduziu a menores envelhecimentos.
- b) Amostragem n.º 9, que, das dez amostragens de 12 dias, foi a que conduziu a maiores envelhecimentos.
- c) Média das amostragens 5, 6 e 9, que é da ordem de grandeza e ligeiramente superior à média das amostragens 1 a 10.

Foram consideradas, entre outras, as seguintes funções interpoladoras:

- a) Para os resultados da amostragem n.º 6:

$$\begin{aligned} \epsilon_3 &= 0,2228 \cdot 10^{-7} \cdot e^{3,200 \cdot f^{1,696}} \text{ dia}^{-1} \\ &= 0,8139 \cdot 10^{-6} \cdot e^{3,200 \cdot f^{1,696}} \text{ ano}^{-1} \end{aligned}$$

- b) Para os resultados da amostragem n.º 9:

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= 0,1766 \cdot 10^{-7} \cdot e^{4,133 \cdot f^{1,59}} \text{ dia}^{-1} \\ &= 0,6452 \cdot 10^{-6} \cdot e^{4,133 \cdot f^{1,59}} \text{ ano}^{-1} \end{aligned}$$

- c) Para a média dos resultados das amostragens n.ºs 5, 6 e 9:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 0,3179 \cdot 10^{-7} \cdot e^{3,218 \cdot f^{1,797}} \text{ dia}^{-1} \\ &= 0,1161 \cdot 10^{-4} \cdot e^{3,218 \cdot f^{1,797}} \text{ ano}^{-1} \\ \epsilon'_1 &= 0,1906 \cdot 10^{-7} \cdot e^{3,700 \cdot f^{1,85}} \text{ dia}^{-1} \\ &= 0,6963 \cdot 10^{-6} \cdot e^{3,700 \cdot f^{1,85}} \text{ ano}^{-1} \end{aligned}$$

Estes desenvolvimentos são caracterizados pelos seguintes erros relativos dos valores resultantes das amostragens em relação aos valores da função:

| Erros relativos dos resultados das amostragens em relação aos desenvolvimentos anteriores |                  |                  |                                |               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|------------------|--------------------------------|---------------|
| <i>f</i>                                                                                  | Amostragem n.º 6 | Amostragem n.º 9 | Média das amostragens 5, 6 e 9 |               |
|                                                                                           | $\epsilon_3$     | $\epsilon_2$     | $\epsilon_1$                   | $\epsilon'_1$ |
| 0,9                                                                                       | 0,0030           | 0,0198           | — 0,0456                       | 0,0181        |
| 1,1                                                                                       | — 0,0123         | — 0,0283         | — 0,0199                       | — 0,0196      |
| 1,3                                                                                       | — 0,0069         | — 0,0162         | 0,0233                         | — 0,0137      |
| 1,5                                                                                       | 0,0069           | 0,0178           | 0,0575                         | 0,0121        |
| 1,7                                                                                       | 0,0135           | 0,0288           | 0,0420                         | 0,0224        |
| 1,9                                                                                       | — 0,0042         | — 0,0219         | — 0,0574                       | — 0,0193      |
| valor quadrático médio                                                                    | 0,0087           | 0,0226           | 0,0435                         | 0,0179        |
| valor máximo                                                                              | 0,0135           | 0,0288           | 0,0575                         | 0,0224        |
| valor negativo de maior módulo                                                            | — 0,0123         | — 0,0283         | — 0,0574                       | — 0,0196      |

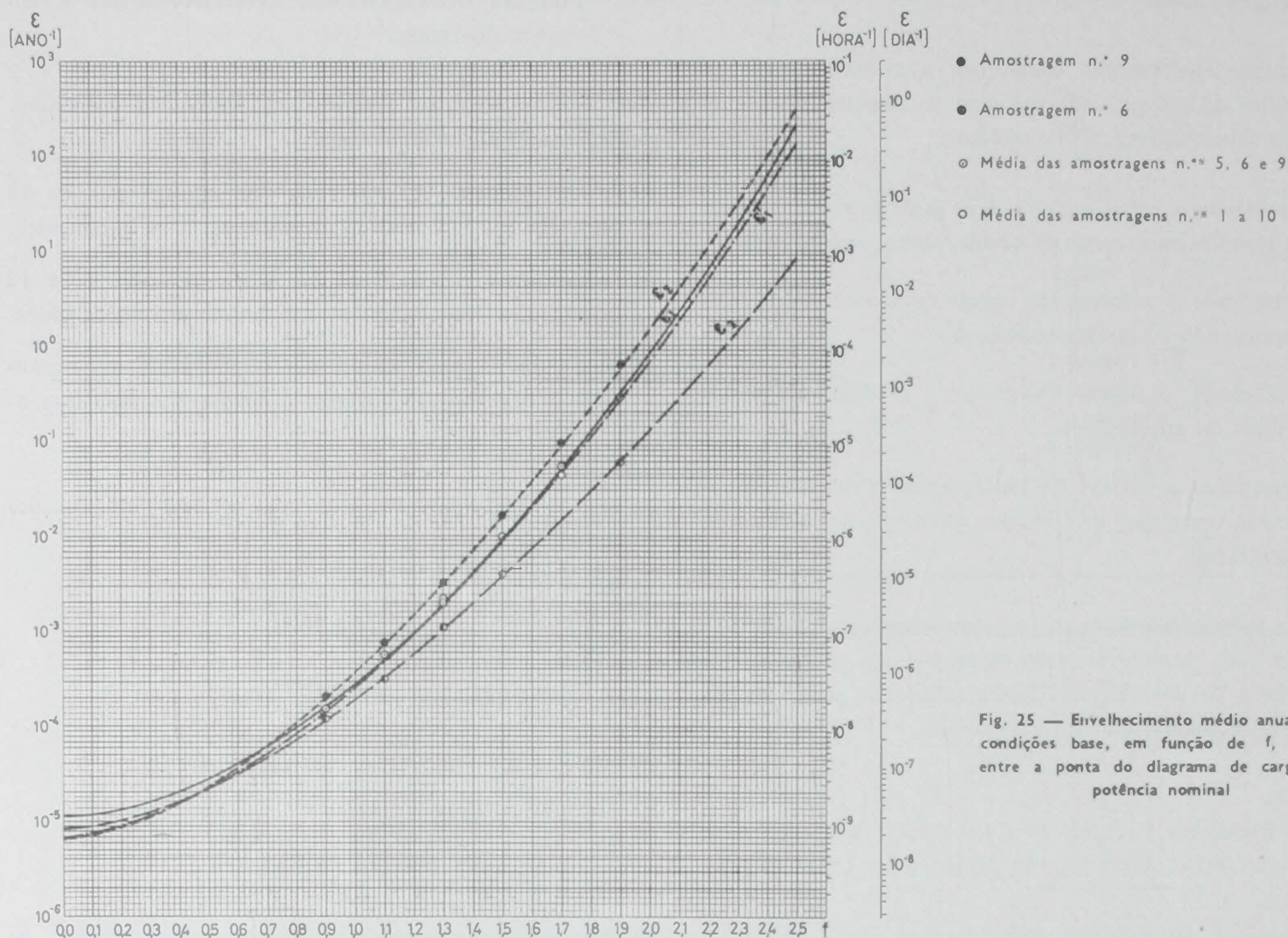


Fig. 25 — Envelhecimento médio anual, para condições base, em função de  $f$ , relação entre a ponta do diagrama de carga e a potência nominal

As funções interpoladoras,  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon'_1$ ,  $\epsilon_2$  e  $\epsilon_3$ , bem como os valores em que se basearam, e a média das amostragens 1 a 10, são indicadas na fig. 25.

A função  $\epsilon_1$ , uma das funções interpoladoras das amostragens 5, 6 e 9 tem, designadamente, as seguintes propriedades:

- O seu desvio em relação à média das amostragens 5, 6 e 9 é moderado, tendo uma diferença relativa de módulo máximo 0,058 e de valor quadrático médio 0,044<sup>(6)</sup>.
- Para  $f = 1$ , 3 é igual a 1,05(28) da média das 10 amostragens, e para  $f = 1,7$  é igual a 1,12(12) da média das 10 amostragens. Desta forma, em termos de esperança matemática, a probabilidade de o valor médio exceder o valor da amostragem é, respectivamente, da ordem de 0,346 e de 0,284.

Têm-se, designadamente e em ordem de grandeza, as probabilidades de o valor médio exceder um valor  $a \cdot \epsilon_1$ , sendo  $\epsilon_1$  o valor da função interpoladora, indicadas no quadro seguinte.

- Nos extremos do intervalo de interpolação a função interpoladora excede os resultados da média das amostragens 5, 6 e 9, sendo a diferença entre os valores experimentais e a função interpoladora em função de  $f$

| $a$ | para<br>$f = 1,3$ | para<br>$f = 1,7$ |
|-----|-------------------|-------------------|
| 0,4 |                   | 0,9990            |
| 0,5 |                   | 0,9849            |
| 0,6 |                   | 0,9388            |
| 0,7 | 0,959             | 0,8231            |
| 0,8 | 0,814             | 0,6529            |
| 0,9 | 0,581             | 0,4586            |
| 1   | 0,346             | 0,2839            |
| 1,1 | 0,172             | 0,1546            |
| 1,2 | 0,072             | 0,0745            |
| 1,3 | 0,031             | 0,0325            |
| 1,4 | 0,013             | 0,0132            |
| 1,5 | 0,005             | 0,0049            |
| 1,6 | 0,001             | 0,0016            |
| 1,7 |                   | 0,0004            |

de forma tal que, muito provavelmente, a extrapolação da função para  $f < 0,9$  ou  $f > 1,9$  será por excesso.

(6) A função  $\epsilon_1$  tem, em relação à média das amostragens 5, 6 e 9, uma diferença relativa de módulo máximo 0,022 e de valor quadrático médio 0,018, traduzindo, portanto, os resultados experimentais com melhor aproximação que  $\epsilon_1$ . A função  $\epsilon_1$ , tem, em relação a  $\epsilon'_1$ , a vantagem referida na alínea c, que dá certa «segurança» à extrapolação. A diferença entre as duas funções é, no entanto, muito pequena e inferior ao erro de cálculos de envelhecimento.

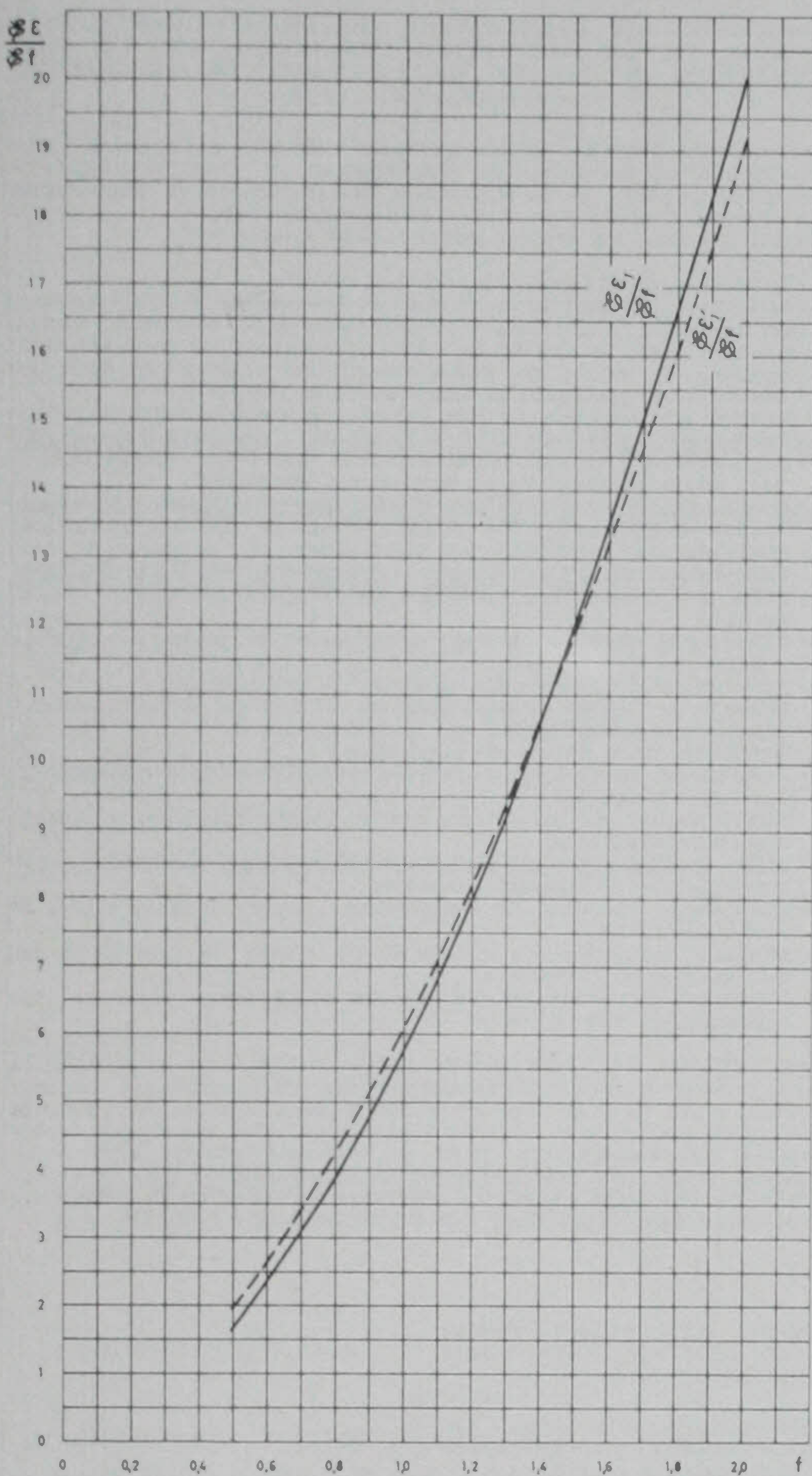


Fig. 26 — Elasticidade envelhecimento potencia.

Estas propriedades e a análise do problema, levam à conclusão de que  $\epsilon_1$ , uma das funções interpoladoras consideradas para a média das amostragens 5, 6 e 9, é adequada para traduzir a relação entre o parâmetro  $f$  e o envelhecimento, com erro «provável» compatível com a precisão que se pode atribuir aos resultados de cálculos de envelhecimento.

#### 4.3 — ELASTICIDADE DO ENVELHECIMENTO DE UM TRANSFORMADOR EM RELAÇÃO À CARGA

Tem grande interesse o conhecimento da elasticidade do envelhecimento de um transformador em relação à carga, em determinado conjunto de condições.

Conforme indicado na posição 4.1, conclui ser conveniente, para determinado conjunto de hipóteses e definições, relacionar o envelhecimento anual com a carga por uma relação da forma

$$\epsilon = a \cdot e^{b \cdot f^p},$$

sendo

$\epsilon$  o envelhecimento anual

$f$  a relação entre a ponta anual do diagrama de cargas e a potência nominal de transformação (para uma mesma «forma» de diagrama)

$a$ ,  $b$  e  $p$  parâmetros

Desta forma, sendo  $f$  proporcional à «carga», a elasticidade em  $\epsilon$  em relação à «carga» (para uma «forma» do diagrama de cargas constante) é igual à elasticidade de  $\epsilon$  em relação a  $f$ . Tem-se portanto:

$$\frac{\mathcal{E} \epsilon}{\mathcal{E} f} = b \cdot p \cdot f^{p-1}.$$

Na posição 4.2, para o exemplo definido, considerei, entre outras, as seguintes funções interpoladoras:

$$a) \quad \epsilon_1 = 0,1161 \cdot 10^{-4} \cdot e^{3,218 \cdot f^{1,797}} \text{ ano}^{-1}$$

$$b) \quad \epsilon'_1 = 0,6963 \cdot 10^{-5} \cdot e^{3,70 \cdot f^{1,85}} \text{ ano}^{-1}$$

As justificações, virtudes e defeitos de ambas foram aí analisadas, pelo que não me refiro ao problema.

Lembro apenas que a relação  $\epsilon_1$  tem algumas vantagens do ponto de vista de «cálculo» de envelhecimentos, sendo, em princípio,  $\epsilon'_1$  mais «fiel» em sentido probabilístico e, portanto, mais adequada para cálculo da elasticidade.

Represento na fig. 26 os valores

$$\frac{\mathcal{E} \epsilon_1}{\mathcal{E} f} = f(f) \quad \text{e} \quad \frac{\mathcal{E} \epsilon'_1}{\mathcal{E} f} = f(f).$$

É notório o elevado valor da elasticidade de  $\epsilon$  em relação a  $f$  e o rápido crescimento desta elasticidade com  $f$ .

(continua)

## resumo

Neste artigo apresentam-se alguns métodos destinados a servir de base à definição da exploração de transformadores de potência a partir da simulação das condições de temperatura do fluido refrigerante, de carga e de indisponibilidade. São tratados, entre outros, os seguintes aspectos:

- Definição do âmbito do problema analisado.
- Condições de definição de aquecimento de transformadores, conjunto de hipóteses simplificativas e correspondente modelo de cálculo de aquecimento e envelhecimento.
- Exemplo de cálculo de envelhecimento por simulação, para um conjunto de hipóteses representativo de um caso real.
- Erros de amostragem em cálculos de envelhecimento de transformadores.
- Relação entre o envelhecimento e a proporção de carga, à parte indisponibilidades e ocorrências similares.
- Envelhecimento ao longo de um ano com diagrama de temperaturas «regularizado», isto é, eliminando por tratamento matemático prévio as flutuações de temperatura de tipo aleatório.
- Efeitos das flutuações aleatórias de temperatura no envelhecimento.
- Efeito no envelhecimento de uma exploração com otimização de perdas.
- Efeito no envelhecimento das flutuações de tensão.
- Efeito no envelhecimento das variações da posição do regulador de tomadas.
- Efeito no envelhecimento de indisponibilidades.
- Definição de um critério de exploração.
- Distribuição de algumas grandezas relacionadas com o envelhecimento dos transformadores.
- Agravamento de perdas associado à exploração em sobrecarga dos transformadores.
- Efeito da exploração de transformadores em sobrecarga sob o ponto de vista de potência reactiva.
- Efeito da variação dos parâmetros adoptados para cálculo do aquecimento.
- Método simplificado de previsão da ordem de grandeza dos envelhecimentos diários.
- Obtenção de diagramas de carga e de temperatura por métodos de simulação.

Os métodos propostos afiguram-se suficientemente fundamentados para basear neles o critério de exploração dos transformadores. Conduzem a resultados muito diferentes de outros usualmente seguidos e apresentam vantagens económicas muito importantes. Num exemplo concreto analisado conclui-se que é viável obter com uma mesma subestação uma potência cerca de 80 % mais elevada, sendo as vantagens económicas da solução bastante superiores aos inconvenientes.

## synopsis

### DEFINITION OF THE TRANSFORMERS UTILIZATION FROM THE SIMULATION OF THE COOLANT TEMPERATURE, LOAD AND UNAVAILABILITY CONDITIONS

This article includes some methods intended to serve as a basis for power transformers service, from the simulation of temperature conditions of the coolant, load and unavailability conditions. Among others, the following aspects are studied:

- Definition of the problem extent.
- Conditions for the definition of the transformers heating, number of simplifying hypotheses and corresponding method for heating and aging calculation.
- Example of aging calculation through simulation for a series of hypotheses representing an actual case.
- Sampling errors in transformers aging calculations.
- Ratio between aging and load proportion, apart from unavailability and similar occurrences.
- Aging through a year with a «regularised» temperature diagram, that is, eliminating aleatory temperature fluctuations by means of a preliminary mathematical treatment.
- Effect of aleatory temperature fluctuations over aging.
- Effect of a service with optimized losses over aging.
- Effect of voltage fluctuation over aging.
- Effect of position changes in voltage regulators over aging.
- Effect of unavailability over aging.
- Definition of a service criterion.
- Distribution of some quantities concerning transformers aging.
- Increase of losses connected with an overload working of the transformers.
- Effect of an overload working of the transformers in what concerns reactive power.
- Effect of the variation of the parameters adopted of heating calculation.
- Simplified method to foresee the average daily aging.
- Obtention of load and temperature diagrams through simulation methods.

The proposed methods seem to be sufficiently grounded to serve as a basis for the transformers working criterion. They lead to results rather different from those usually followed and display very important economical advantages. From a concrete example which has been studied, it was concluded that it is possible to obtain a power about 80% higher with the same substation, whereas the economical advantages of this solution greatly exceed its inconveniences.

## résumé

### DEFINITION DE L'UTILISATION DE TRANSFORMATEURS A PARTIR DE LA SIMULATION DES CONDITIONS DE TEMPERATURE DU FLUIDE RÉFRIGÉRANT, DE CHARGE ET D'INDISPONIBILITE

On présente dans cet article quelques méthodes destinées a servir de base à la définition de l'exploitation de transformateurs de puissance à partir de la simulation des conditions de température du fluide réfrigérant, de charge et d'indisponibilité. Parmi d'autres, les aspects suivants sont étudiés:

- Définition de l'étendue du problème traité.
- Conditions de définition de l'échauffement de transformateurs, un ensemble d'hypothèses simplificatrices et le modèle correspondant pour le calcul de l'échauffement et du vieillissement.
- Exemple de calcul du vieillissement par simulation, pour un ensemble d'hypothèses représentatif d'un cas réel.
- Erreurs d'échantillonnage aux calculs de vieillissement de transformateurs.
- Rapport entre le vieillissement et la proportion de charge, à part les indisponibilités et occurrences similaires.
- Vieillissement le long d'une année avec diagramme de températures «régularisé» c'est à dire, éliminant par un traitement mathématique préalable les fluctuations de température type aléatoire.
- Effet des fluctuations aléatoires de température sur le vieillissement.
- Effet d'une exploitation avec optimisation de pertes sur le vieillissement.
- Effet des fluctuations de tension sur le vieillissement.
- Effet de la position du régulateur de tension sur le vieillissement.
- Effet des indisponibilités sur le vieillissement.
- Définition d'un critère d'exploitation.
- Distribution de quelques grandeurs rapportés avec le vieillissement des transformateurs.
- Augmentation de pertes associée à l'exploitation en surcharge des transformateurs.
- Effet de l'exploitation de transformateurs en surcharge en ce qui concerne la puissance réactive.
- Effet de la variation des paramètres adoptés dans le calcul de l'échauffement.
- Méthode simplifiée de prévision de l'ordre de grandeur des vieillissements journaliers.
- Obtention de diagrammes de charge et de température par des méthodes de simulation.

Les méthodes proposées semblent être suffisamment fondementées pour y baser le critère d'exploitation des transformateurs. Ils conduisent a des résultats très différents de ceux obtenus avec d'autres méthodes usuellement suivies et présentent des avantages économiques très importantes. Dans un exemple concret analysé on conclue qu'on peut obtenir avec un même poste une puissance d'environ 80 % plus élevée, les avantages économiques de cette solution étant très supérieures aux inconvénients.