

Aplicação de otimização multiobjetiva a um problema de engenharia de transportes

TADEU DA MATA MEDEIROS BRANCO

Prof. Ass. Eng. Eléctrica

Dept.º Eng. Eléctrica do CTUFPA (Campinas, Brasil)

resumo

Apresenta-se a aplicação da técnica de Compromisso de Programação para resolver um problema de otimização multiobjetiva em Engenharia de Transportes contendo quinze objetivos, alguns deles conflitantes e cada um sujeito a sete alternativas. A primeira parte da solução que envolve o aspecto de Engenharia forneceu os dados para a segunda parte que representa a tomada de decisão entre os resultados apresentados.

abstract

It is showed an application of Compromise Programming Technique to the solution of a multiobjective optimization problem in Transport Engineering with fifteen objectives some of them conflicting and each one subjected to seven alternatives. The first step of the solution concerning the Engineering aspects provided data to the second step that represents the trade-off among the results.

1. INTRODUÇÃO

Os problemas de otimização visam a maximização ou minimização de uma função numérica

$$f: R^n \rightarrow R^1 \quad (1)$$

constituída de uma ou mais variáveis (ou funções) quase sempre sujeitas a determinadas restrições lineares e/ou não lineares, encontrando um X^* que é considerado a solução ótima para o problema apresentado. Problemas que envolvem mais de uma função objetiva são conhecidos como de otimização multiobjetiva sendo geralmente constituídos por objetivos conflitantes, definindo dessa maneira um vetor de objetivos para cada alternativa apresentada pelo problema [1-3].

A conceituação básica da otimização multiobjetiva foi proposta inicialmente por V. Pareto em 1896 no livro «Cours d'Economie Politique», depois de alguns anos foi

relembrada por Koopmans em seu trabalho «Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities» em 1951. No mesmo ano, Kuhn-Tucker e posteriormente outros interessados no assunto desenvolveram técnicas atualmente usadas na solução dos problemas de otimização multiobjetiva em Engenharia de Transportes; sistemas de controle de avião; sensibilidade de sistemas de potência e outros. Um levantamento efetuado por Cohon e Marks [2] em 1975 mostrou a existência de um número aproximado de 20 técnicas de otimização multiobjetiva.

2. A OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVA

Considere-se um problema de otimização envolvendo a minimização de uma simples função objectiva $f(X)$ com $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ ou $X \in R^n$. Como solução, existe um X^* chamado valor ótimo que satisfaz

$$f(X^*) \leq f(X) \quad (2)$$

entre todos os X de interesse. Na presença de números reais esta relação é possível visto que os valores da função nos diversos pontos X podem ser relacionados por um sinal de igualdade ou desigualdade. No entanto uma situação em que o problema envolve objetivos múltiplos simultaneamente é normal ocorrer objetivos que são conflitantes levando ao aumento de um enquanto um outro decresce, impossibilitando uma ordenação completa dos múltiplos objetivos através de uma relação de igualdade ou desigualdade. A ausência desta ordenação total vem de caracterizar o problema da otimização multiobjetiva. Entretanto, invocando o conceito da EFICIÊNCIA DE PARETO ou NÃO INFERIORIDADE é possível uma ordenação parcial das alternativas factíveis para solução do problema. Este conceito é assim definido:

«Considere-se X^* e X duas alternativas e $f(X^*)$ e $f(X)$ os valores correspondentes do vetor objetivo. Procurando minimizar cada um dos elementos do vetor objetivo, $f(X)$ é inferior a $f(X^*)$ se e somente se seus elementos satisfazem a:

$$f_j(X^*) < f_j(X) \quad (3)$$

pelo menos a um valor de $j \in$,

$$f_K(X^*) \leq f_K(X) \quad \forall K \neq j'' \quad (4)$$

Se todas as funções objectivas $f_j(X)$ que constituem o vetor objectivo

$$F(X) = f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)^T \quad (5)$$

são comensuráveis, para encontrar-se o X^* que minimiza alguma função objectiva faz-se

$$\text{Min } f_i(X), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

Na presença de funções objectivas incomensuráveis não é possível encontrar-se uma solução ótima de acordo com (6) devido a conflitos entre os objetivos e para a solução deve-se recorrer a (3) e (4) que fornecerão um conjunto de soluções ótimas através de uma região de pontos não inferiores (ou soluções não inferiores) definida por

$$X^* = \{X \mid X \in \chi \text{ e } X \text{ satisfaça (3) e (4)}\} \quad (7)$$

onde χ representa a região factível do espaço de decisão contendo as alternativas ótimas para solução do problema de otimização multiobjectiva.

3. COMPROMISSO DE PROGRAMAÇÃO

Considera-se as soluções de compromisso como aquelas mais próximas por alguma medida de distância de um determinado ponto ideal. Entre todos os valores definidos para um i -ésimo objetivo, existe pelo menos um valor que é preferível sobre todos os outros.

Para solução considera-se cada um objetivo de maneira isolada sendo determinados o melhor e o pior valor dentre todos aqueles apresentados e que representam f_i^+ e f_i^- respectivamente.

Problemas reais envolvendo otimização multiobjectiva são constituídos de objetivos que não possuem as mesmas unidades e isto requer por conseguinte uma normalização através de um fator de escala.

Fazendo-se uso da normalização/das unidades para cálculo da proximidade de um dado objetivo ao ponto ideal é usada a chamada métrica L_p definida pela expressão:

$$L_p = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^p \left[\frac{f_i^+ - f_i(X)}{f_i^+ - f_i^-} \right]^p \right\}^{1/p} \quad (8)$$

em que

- p — representa uma estrutura de preferência que leva a diversos métodos de otimização multiobjectiva
- a_i — pesos definidos a partir de uma estrutura de preferência
- $f_i(X)$ — valor da i -ésima função objectiva em uma alternativa considerada

4. ALGORITMO

A aplicação do algoritmo para o compromisso de programação requer inicialmente a definição de uma matriz contendo os valores dos objetivos versus alternativas de dimensão NN^*JJ ; um vetor com valores 2 ou 1 para definir se os objetivos são crescentes ou decrescentes, assim como um vetor contendo os pesos a_i 's.

Considera-se objetivo crescente aquele em que f_i^+ representa o maior valor dentre todas as alternativas apresentadas e f_i^- o menor. No vetor OBJ(I) este objetivo é representado pelo algarismo 2. O objetivo é considerado decrescente quando f_i^+ representa o menor valor dentre todas as alternativas apresentadas e f_i^- o maior. Este objetivo é representado no vetor OBJ(I) pelo algarismo 1. Considera-se os seguintes passos para o algoritmo {5}:

- a — entrar com a matriz F_{ij} , os pesos a_i 's e o vetor de definição dos objetivos com $i=1, \dots, NN$ e $j=1, \dots, JJ$.
- b — para cada critério estabelecido e com a ajuda do vetor dos objetivos, determinar o melhor f_i^+ e o pior f_i^- dentre todas as alternativas apresentadas.
- c — calcular

$$d_{ij} = (f_i^+ - f_{ij}) / (f_i^+ - f_i^-) \quad \forall i, j \quad (9)$$

- d — para $p \in [1; \infty]$ determinar

$$\text{Min}_j \left[\sum_{i=1}^n (a_i d_{ij})^p \right]^{1/p} \quad (10)$$

- e — $\forall p$ determinar

$$\text{Min}_j \text{ Max}_i d_{ij} \quad (11)$$

- f — comparar as várias soluções de compromisso
- g — apresentar os resultados para a tomada de decisão

O fluxograma da Fig. 1 melhor explica o funcionamento deste algoritmo.

5. PROBLEMA PROPOSTO

Com a ajuda do algoritmo apresentado na secção anterior procura-se resolver o problema que visa ligar uma cidade A a uma outra B por meio de estrada devendo ser tomada uma decisão entre sete alternativas apresentadas por cada um dos objetivos: 1 — Recreação; 2 — Gasto com combustível; 3 — Comprimento total do percurso; 4 — Custo total de asfalto; 5 — Tempo de percurso; 6 — Segurança; 7 — Desenvolvimento comercial; 8 — Desapropriação de terras para a passagem de estrada e/ou construção de pontes; 9 — Terras irrigadas; 10 — Custo de pontes; 11 — Custo de viadutos; 12 — Congestionamento; 13 — Ganho com Pedágio; 14 — Custo de Eletrificação; 15 — Terraplanagem.

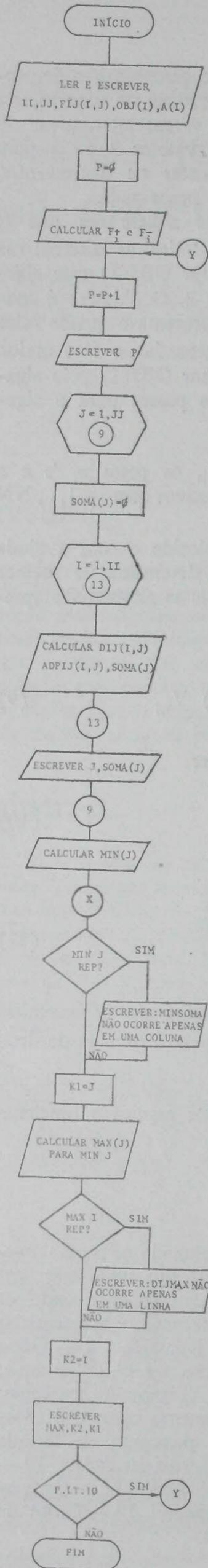


Fig. 1 — Fluxograma para solução do problema proposto, baseado no algoritmo da secção 4

As alternativas representadas na Fig. 2 são: 1 — de B para A através de G; 2 — de B para A em linha reta e pista única com mão dupla de tráfego; 3 — de B para A em linha reta com pista dupla de tráfego; 4 — de B para A através de CFA com o trecho CF em pista única de mão dupla de tráfego; 5 — de B para A através de CFA com o trecho CF em pista dupla de tráfego; 6 — de B para A através de CDFA com o trecho DF em pista única de mão dupla de tráfego e 7 — de B para A através de CDFA com o trecho DF em pista dupla de tráfego.

A partir de um valor numérico padrão para cada unidade de tempo, percurso, quilometragem e outros objetivos, construiu-se a matriz F_{ij} , representada na tabela I.

TABELA I

VALORES PARA CONSTRUÇÃO DA MATRIZ F_{ij}

ALT \ CRIT	01	02	03	04	05	06	07
01	100	70	70	150	150	200	200
02	200	150	120	250	230	280	250
03	200	150	280	280	350	350	350
04	200	150	300	280	540	350	650
05	200	150	120	280	220	350	300
06	100	200	200	100	150	100	200
07	100	80	100	150	200	250	300
08	100	100	120	100	120	180	200
09	300	100	50	300	300	300	300
10	100	80	160	160	240	180	270
11	100	50	100	150	300	180	250
12	100	80	60	120	90	90	70
13	100	50	70	120	180	200	250
14	100	200	250	300	350	400	450
15	100	150	280	150	180	20	30

O vetor $OBJ(I)$ é definido como:

$$(211112212111211)^T \quad (12)$$

que permite encontrar o valor de f_i^+ e f_i^- em cada objetivo. Desenvolvido o algoritmo em termos computacionais e fazendo-se p variar de 1 a 10 levando em consequência a diversas métricas e com $a_i = 1, \forall_i$, com $i = 1, 2, \dots, N$, encontrou-se os valores representados na Tabela II que permitirão a tomada de decisão com base no menor valor dentre todos aqueles calculados através de 10 e para cada valor de p .

Para valores de p compreendidos entre [1;5], a melhor alternativa apresentada é a de número 1, enquanto para valores de p compreendidos entre [1;10], a alternativa 5 surge como a melhor dentre todas as apresentadas. Resta no entanto ser tomada a decisão entre qual das duas alternativas extraídas do total de sete deve ser aceite. A alternativa 1 oferece um mínimo custo com eletrificação de rodovia, uma menor desapropriação de terras e, em consequência, maior área de terras irrigadas. Apresenta também a pior segurança. Por outro lado, a alternativa 5 também apresenta a maior área de terras

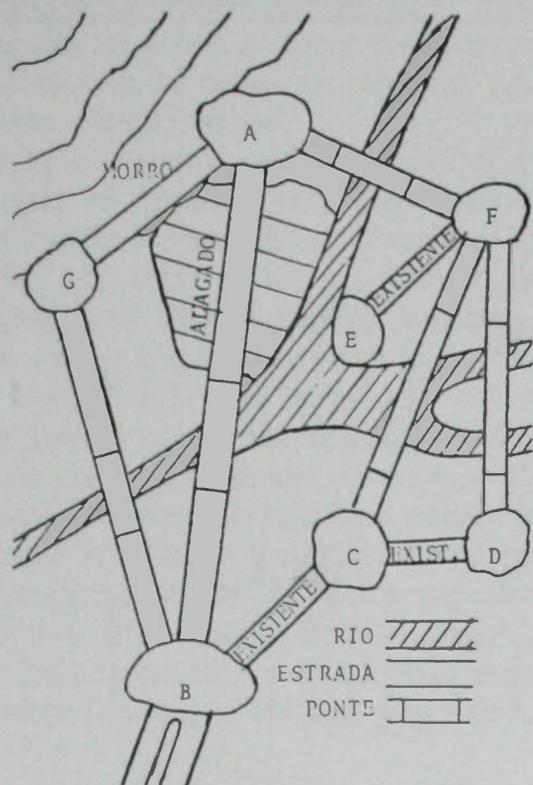


Fig. 2 — Alternativas para solução do problema proposto

TABELA II

VALORES DE Min_j ($\cdot 10^3$) PARA DIVERSOS VALORES DE p

J \ P	01	02	03	04	05	06	07
01	5906	6237	6359	8027	8113	8081	7600
02	2004	2266	2273	2363	2304	2539	2635
03	1465	1676	1672	1622	1561	1780	1869
04	1275	1456	1450	1367	1307	1510	1579
05	1181	1343	1335	1248	1188	1375	1430
06	1128	1274	1226	1181	1123	1295	1340
07	1094	1228	1219	1141	1083	1243	1280
08	1071	1195	1185	1114	1058	1206	1237
09	1055	1171	1160	1096	1041	1179	1206
10	1044	1152	1141	1082	1030	1158	1182

irrigadas, uma segurança bem superior embora apresente o viaduto de custo mais elevado, o que vem de permitir sua escolha face ao item segurança ser bastante significativo.

6 CONCLUSÕES

Os problemas de otimização que envolvem mais de uma simples função objetiva necessitam de técnicas multiobjetivas para a sua solução, de vez que geralmente os objetivos apresentados são conflitantes [1-4].

A aplicação do compromisso de programação, um algoritmo que visa encontrar as soluções bem mais próximas da ideal, permitiu o conhecimento de informações numéricas empregadas para a fase de tomada de decisão restringindo dessa maneira a quantidade de alternativas apresentadas ao problema proposto. Estas informações foram obtidas para diversos valores de p e com pesos de a_i 's todos iguais a 1. A aplicação de pesos iguais para cada objetivo embora diferentes, de 1 e contidos no intervalo [2,9], leva a modificação nos valores da tabela II embora para cada valor de p as alternativas ótimas permaneçam inalteradas. No entanto, a aplicação de pesos diferentes para cada um dos objetivos que o problema deve satisfazer, leva a modificação na alternativa ótima para um dado valor de p , embora seja garantido a existência de pelo menos um objetivo, na alternativa escolhida, contendo o melhor valor dentre todos os outros apresentados.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Robert Liang Koo da Faculdade de Engenharia da UNICAMP pelas sugestões a este trabalho.

Ao Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Pará (DEE-CTUFPA.), pelo apoio financeiro necessário a elaboração deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] T. M. M. BRANCO: *Compromisso de Programação na Otimização Multiobjetiva*; Publicação Técnica em fase de reprodução pelo DEE-CTUFPA. (Fev. 1980).
- [2] J. L. COHON, D. H. MARKS: *A Review and Evaluation of Multiobjective Programming Techniques*; Water Resources Research, Vol. II. No. 2 (Abril 1978).
- [3] B. S. GOTTFRIED, J. WEISMAN: *Introduction to Optimization Theory*; Prentice Hall Inc. (1973).
- [4] ROBERT L. KOO: *Multiobjective Optimization for Fixed Route Vehicles*; Ph. D. Dissertation, Carnegie-Mellon University (August 1978).
- [5] S. OPRICOVIC, et. al.: *Multiobjective Optimization in Water/Resources Planning*; Congresso do IAHR, Cagliari, Itália (Setembro 1979).