Álgebra de Boole

Teoria de Boole

Em meados do século passado o filósofo e matemático George Boole concebeu uma teoria que serve de base aos modernos sistemas digitais:

- **Princípio binário:** na teoria de Boole todos os elementos são biestáveis, isto é, só têm dois estados possíveis, os quais são opostos entre si, não se admitindo estados intermédios. Exemplos: ligado/desligado (circuito), aceso/apagado (lâmpada), excitado/desexcitado (relé), condução/bloqueio (diodo);
- **Estrutura lógica:** a teoria booleana assenta numa lógica traduzida por vários postulados e algumas operações (ver a seguir);
- **Realização tecnológica:** as equações lógicas, que traduzem o comportamento dos sistemas binários, são realizáveis por diferentes tecnologias, conforme os seus elementos construtivos: mecânicos, hidráulicos, pneumáticos, electromagnéticos ou electrónicos;
- **Tabela de verdade:** é um quadro cujas colunas indicam os valores lógicos das variáveis (entradas e saídas do sistema) em todas as combinações possíveis.

Postulados

A álgebra booleana baseia-se em postulados, cuja validade se pode verificar através das tabelas de verdade dos operadores lógicos, havendo cinco pares de postulados duais (um obtém-se do outro trocando entre si 0's com 1's e a operação AND com OR):

a) $0.0 = 0 \quad ; \quad 1 + 1 = 1$

b) $0.1 = 0 \quad ; \quad 1 + 0 = 1$

c) $1.0 = 0 \quad ; \quad 0 + 1 = 1$

d) $1.1 = 1 \quad ; \quad 0 + 0 = 0$

e) $\overline{0} = 1 \quad ; \quad \overline{1} = 0$

Leis Básicas

A álgebra de Boole possui vários axiomas, que se demonstram por meio das tabelas de verdade, correspondendo cada uma a duas operações duais:

- Lei da **comutatividade**

$$A \,.\, B = B \,.\, A$$
$$A + B = B + A$$

- Lei da **associatividade**

$$A \,.\, (B \,.\, C) = (A \,.\, B) \,.\, C$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

- Lei da **distributividade**

$$A \,.\, (B + C) = A.B + A.C$$
$$A + (B \,.\, C) = (A + B).(A + C)$$

- Lei da **absorção**

$$A \,.\, (A + B) = A$$
$$A + (A \,.\, B) = A$$

- Lei da **idempotência**

$$A \,.\, A = A$$
$$A + A = A$$

- Lei da **identidade** ou dos **elementos neutros**

$$A \,.\, 1 = A$$
$$A + 0 = A$$

- Lei dos **elementos nulos**

$$A \,.\, 0 = 0$$
$$A + 1 = 1$$

- Lei dos **elementos complementares**

$$A \,.\, \overline{A} = 0$$
$$A + \overline{A} = 1$$

- Lei do **complemento duplo** ou da **dupla negação**

$$\overline{(\overline{A})} = A$$

Teoremas

Destas leis básicas deduzem-se algumas regras, que se podem demonstrar pelas tabelas de verdade:

- **Regra de simplificação:** se for $A.B = A.C$ e $A + B = A + C$ será $B = C$;
- **Regras de Morgan:** o complemento de uma operação de duas variáveis é igual à operação dual dos complementos das variáveis (na prática divide-se o traço de complementaridade e troca-se o sinal da operação)

$$\overline{A \,.\, B} = \overline{A} + \overline{B}$$
$$\overline{A + B} = \overline{A} \,.\, \overline{B}$$

- **Lei de Shannon** (generalização das leis de Morgan): a partir de uma função $\overline{f}$ de várias variáveis e constantes obtém-se a função complementar f substituindo todas as variáveis e constantes pelos seus complementos e trocando os sinais das operações

$$\overline{f\ (A, B, \ldots;\ 0, 1:., +)} =$$
$$= f\ (\overline{A}, \overline{B}, \ldots;\ 1, 0;\ +, .)$$