

Representação hierárquica em Elementos Finitos

Adelino Silva Dr. Eng.º Elect.(FCT/UNL)

H. Duarte-Ramos Prof. Dr. Eng.º Elect. (FCT/UNL)

Grupo de Engenharia Sistémica (FCT/UNL)

resumo

cia de informação geométrico-topológica para o modelo de elementos finitos têm constituído o principal obstáculo à sua plena automatização. Nesta comunicação apresenta-se um modelo de representação integrado, único e completo, baseado numa decomposição hierárquica e recursiva. A realização funcional do modelo proposto foi aplicada à análise de problemas no âmbito das distribuições de campo eléc-

orly structured and con-

O método dos elementos finitos constitui hoje em dia uma poderosa e versátil técnica de simulação e análise, extensivamente usada na maioria dos ramos da engenharia. As limitações existentes na presente geração de sistemas de solução por elementos finitos ao nível do modelo de representação e da transferêntrico.

summary

The finite element method is now well established as a powerful as well as versatile technique in many fields of engineering analysis. Nevertheless, in current finite element systems, finite element modellers are po-

ceived independently of the geometric modellers, precludding the emergence of really, automatic finite element systems. Consideration is given in this paper to the development of an integrated modelling system that provides complete and unique geometric representations based on spatially oriented, hierarchical data structures.

375

Introdução

As limitações existentes na presente geração de sistemas de solução por elementos finitos ao nível do modelo de representação e da transferência de informação geométrico-topológica para o modelo de elementos finitos têm constituído o principal obstáculo à plena automatização do método dos elementos finitos. As diversas fases que compõem este método, tradicionalmente designadas por pré-processamento, solução e pós-processamento, tendem cada vez mais a ser concebidas como interligadas e interactuantes, visando incorporar vários desenvolvimentos no âmbito do desenho assistido por computador, dos geradores de malha, dos algoritmos de solução e da análise adaptativa. No entanto, a dificuldade de dispor dum modelo integrado, capaz de dar satisfação às exigências impostas pelas diversas fases, tem originado com frequência e proliferação de modelos de representação

(*) Comunicação apresentada nas 1.35 Jornadas Hispano-Lusas de Ingenieria Electrica, em Vigo, 4 a 6 de Julho de 1990.

incompletos, quando concebidos dum ponto de vista

ELECTRICIDADE - N.º 272 - NOVEMBRO 1990

integrado dirigido à automatização plena. Propõe-se neste artigo um modelo de representação integrado, único e completo, baseado numa decomposição espacial hierárquica e recursiva. A análise por elementos finitos de Galerkin [1] é desenvolvida no quadro da nova estrutura de representação com base em funções de forma modificadas, adaptadas às características da malha apresentada, designada malha quadtree ou quadárvore.

O termo quadárvore designa uma classe de estruturas de dados hierárquicos, de resolução variável, baseada numa técnica de enumeração espacial bidimensional por decomposição recursiva [2]. A construção da estrutura quadárvore duma figura poligonal obtém-se por decomposição recursiva duma janela $2^r \times 2^r$, no domínio imagem, afecta a uma dada resolução $R = 2^r$, controlável pelo utilizador. O critério de complexidade adoptado no refinamento (continuação da divisão recursiva) baseia-se na homogeneidade de cor, identificando áreas interiores, exteriores e fronteira da região em análise, recorrendo a algoritmos de clipping. De acordo com este critério, a janela é recursivamente dividida em quatro sub-janelas iguais sempre que um lado da linha poligonal penetrar na janela em análise. O critério limite imposto é o

embora se possam obter tabelas de vizinhança através de algoritmos de procura, com custo proporcional ao produto do número de nós N pelo número de elementos E, ou seja, $O(N \cdot E)$. Na sua forma mais elementar, a geração de malha consiste então na especificação manual dos dados afectos àquelas listas.

A geração de malha quadárvore consta de duas fases. Na primeira fase é feita a definição da geometria recorrendo a operações quadárvore. Na segunda fase é imposta a condição de vizinhança restrita a todos os elementos. Esta condição limita a dois o número máximo de elementos adjacentes (primeiros vizinhos não-diagonais) a um lado dum dado elemento. Isto é, um refinamento de malha progride quando muito no relação 1:2 entre elementos adjacentes. Partindo duma partição espacial recursiva do espaço obtém-se uma estrutura hierárquica arborescente, em que as folhas da estrutura representam objectos primitivos e os nós interiores representam objectos compostos (associação de objectos primitivos). Estes objectos primitivos ou elementares serão, para efeitos da análise por elementos finitos que se segue, entendidos como elementos. Os objectos elementares correspondem aos elementos propriamente ditos, e os objectos compostos correspondem a super--elementos. A informação básica a incorporar no modelo diz respeito à definição da geometria dos elementos e à definição da numeração dos nós dos elementos. Devido à forma de partição espacial regular usada, a geometria dos elementos fica definida especificando apenas as coordenadas dum nó e a dimensão do elemento. Sem perda de generalidade, consideram a seguir apenas elementos quadrangulares bilineares e isoparamétricos. A incorporação desta informação na estrutura quadárvore é feita ligando por apontadores cada nó-folha da estrutura árvore a uma nova estrutura designada elemento. Em linguagem C a estrutura quadárvore redefinida e a estrutura elemento vêm então:

da resolução especificada pelo utilizador. As quadárvores e formas codificados afins são estruturas particularmente úteis e eficientes quando se pretende operar transformações sobre os objectos que representam. As operações booleanas sobre figuras são particularmente eficientes em termos de quadárvores. A partir das figuras elementares estabelece-se uma estruturação orientada à definição de objectos. A subsequente realização sobre os objectos de operações geométricas de conjunto (booleanas), permite ao utilizador modelar interactivamente geometrias bidimensionais complexas. A codificação quadárvore de objectos torna possível o desenvolvimento dum procedimento de malhagem quadrangular, a partir do próprio processo de decomposição hierárquico recursivo usado pela estrutura de representação.

Geração de malhas de elementos quadárvore

Os geradores de malha no âmbito do método dos elementos finitos têm por função gerar uma adequada discretização da região do espaço em análise, a partir da sua definição geométrica. As malhas de elementos finitos têm sido tradicionalmente representadas por duas listas: a lista de coordenadas dos nós e a lista dos nós afectos aos elementos. Nesta representação não existe qualquer informação explícita typedef struct quadarvore {
 char info;
 struct árvore * left, * mid1, * mid2, * right;
 struct elemento * lfptr;};
 typedef struct elemento {

int num;	/* número do elemento	*/
char tipo;	/ * tipos P, X	*/
int filhos;	/ * quadrantes 1, 2, 3, 4	*/
int dim;	/* dimensão do elemento	*/
int xy [2];	/ * coordenadas dum nó	*/
int no [4];	/ * numeração dos nós	*/
int flag [5]:	/ * bandeiras de assemblae	em *

acerca de vizinhanças entre nós ou entre elementos,

376

struct elemento * next;};

ELECTRICIDADE - N.º 272 - NOVEMBRO 1990

A estrutura incorpora também variáveis de numeração do elemento, de identificação do tipo de elemento (interior ou fronteira), e de identificação do tipo de vizinhança (bandeiras de assemblagem). As estruturas do tipo elemento, correspondentes a nós interiores ou fronteira são posteriormente ligadas em lista. A estrutura resultante apresenta o aspecto indicado na figura 1. A numeração dos elementos que se representa corresponde à sequência do percurso pré-ordem dos nós folha interiores ou fronteira do domínio. A estrutura ligada elemento contém toda a informação necessária para a fase de solução por elementos finitos, pelo que se torna útil desligar a lista ligada da estrutura arborescente, construindo uma lista duplamente ligada, independente, de estruturas elemento.

onde A é um operador elíptico, σ constante $\geq 0, Q$ um domínio limitado em \mathbb{R}^{N} com fronteira Γ, n a direcção da normal exterior a $\Gamma_{2} \in \Gamma = \Gamma_{1} \cup \Gamma_{2}$.

Como se sabe, na formulação isoparamétrica tanto a interpolação das coordenadas como a interpolação dos valores da função ou funções associadas à região em análise usam as mesmas funções de interpolação, definidas no sistema de coordenadas natural do elemento. Assim, a função (ou funções) definida no elemento é interpolada do mesmo modo que a geometria subjacente. Considerando um elemento bidimensional genérico, a interpolação de coordenadas pode ser expressa por $X = \Sigma N_i x_i$, $y = \Sigma N_i y_i$, i = 1, ..., q, sendo x, y as coordenadas dum ponto genérico no elemento de $x_i, y_i, i = 1, ..., q$, as coordenadas dos seus q nós. As funções de inter-



Análise por elementos finitos

A técnica apresentada de geração de malha a partir da estrutura quadárvore gera elementos nãoconformes. No entanto, a normalização imposta pela condição de vizinhança restrita (garantindo uma transição de malha grossa para malha fina na relação 1:2) e a introdução de funções de base modificadas, definidas abaixo, permitem adequar a malhagem quadárvore à solução clássica por elementos finitos (com elementos conformes) [1, 3].

Considere-se o problema de valores fronteira em equações diferenciais do tipo elíptico descrito por

$$Au = f \qquad \text{em } Q,$$

$$u = g \qquad \text{em } \Gamma_{I},$$

$$\frac{\delta u}{---+} = 0 \qquad \text{em } \Gamma_{I}$$

polação (funções de base ou funções de forma) N_i estão definidas no sistema de coordenadas natural do elemento, definido em termos das variáveis r, svariando entre -1 e +1. As funções N_i para o elemento linear assumem a forma $N_i = \frac{1}{4} (1 + rr_i)$ $(1 + ss_i)$, sendo r_i , s_i as coordenadas naturais do nó *i*. Usando as funções de interpolação N_i assim definidas é então possível aproximar qualquer função u definida no elemento por $u = \sum N_i u_i$, i = 1, ..., q.

Considerem-se os elementos lineares da figura 2a. As coordenadas dum ponto na interface 3-5 podem ser expressas por $x = \frac{1}{2}(1-r)x_3 + \frac{1}{2}(1+r)x_5$, $y = \frac{1}{2}(1-r)y_3 + \frac{1}{2}(1+r)y_5$, com r variando entre -1 e + 1. Daí resulta $r = [2(x - y) - (x_3 - y_3) - (x_5 - y_5)] / [(x_5 - y_5) - (x_3 - y_3)].$

De igual modo a função u vem expressa por $u = \frac{1}{2}(1 - r)u_3 + \frac{1}{2}(1 + r)u_5$. Com $u = \mathbf{N}^{\mathsf{T}}\mathbf{q}$, onde $\mathbf{N}^{\mathsf{T}} = [h_7 \ h_6 \ h_3 \ h_4], \ \mathbf{q}^{\mathsf{T}} = [u_7 \ u_6 \ u_3 \ u_4], \ \text{se} \ h_1 \ \text{forem}$

377

as funções de base habituais definidas no nó i,

ELECTRICIDADE - N.º 272 - NOVEMBRO 1990

Sn



Fig. 2 — Elementos para refinamento-h.
a) Refinamento simples.
b) Refinamento duplo.

seguindo o procedimento apresentado em [4] introduzem-se funções de base modificadas nos elementos de forma a garantir a sua compatibilidade. Considerando elementos lineares, impõe-se à função no nó 4 a condição de interpolação linear entre os nós 3 e 5. Deste modo vem $\mathbf{N'^T} = [h_7 \ h_6 \ h_3 + \frac{1}{2} (1 - r_4) \ h_4]$ $[(1 + r_4) \ h_4], \ \mathbf{q'^T} = [u_7 \ u_6 \ u_3 \ u_5], \text{ onde } r_4 \text{ designa a}$ coordenada interpolada do nó 4, obtida por substituição das coordenadas x_4, y_4 . Supondo o nó 4 localizado no ponto médio do segmento 3-5, $r_4 = 0$, que $\mathbf{N'^T} = [h_7 \ h_6 \ h_3 + \frac{1}{2} (h_4) \ \frac{1}{2} \ (h_4)]$. Com um procedimento análogo pode-se obter (fig: 2b) $x_4 =$ $= \frac{1}{2}(1 - r) x_3 + \frac{1}{2}(1 + r) x_5, x_2 = \frac{1}{2}(1 - s) x_3 + \frac{1}{2}(1 - s) x_4$

Aplicações

Para fins de teste analisaram-se algumas configurações electródicas para diversas resoluções de malha, comparando os valores teóricos do potencial e da intensidade de campo eléctrico com os valores obtidos na análise [5]. Apresentam-se a seguir alguns resultados obtidos para a configuração esfera-plano. As unidades usadas para o campo eléctrico [%/um] referem-se a uma diferença de potencial normalizada de 100 para 0 volts entre eléctrodos, com a distância medida em unidades do modelo [um]. Supõe-se que o dieléctrico é o ar, por razões de simplificação.

A solução analítica de distribuições de campo eléctrico e de potencial entre eléctrodos esféricos (fig. 3a) pode ser obtida recorrendo ao sistema de coordenadas bi-esféricas [6]. Designa-se por ℓ a distância entre eléctrodos segundo a linha de separação electrónica mínima, U o potencial no eléctrodo de alta tensão de raio r_1 , Φ o potencial, Φ' o potencial normalizado Φ/U , E a intensidade de campo eléctrico e E' a intensidade normalizada E' = |rI * E/U|. Estas designações foram adoptadas por Mattingley et al. [7] e por Pillai et al. [8] no estudo de configurações electródicas esféricas pelo que se utilizam também a seguir, com vista a comparar os resultados. Mattingley efectuou uma tabelação de valores

 $+\frac{1}{2}(1+s)x_6.$

Fig. 3 — Configuração esfera-plano.

- a) Modelo da configuração essera-plano.
- b) Geometria quadárvore para a configuração esfera-plano.
- c) Linhas equipotenciais para a configuração esfera-plano.







para várias geometrias, ao longo da linha de menor separação inter-electrónica. Estes resultados foram posteriormente confirmados por Pillai usando o método de simulação de carga [9]. O Quadro 1 apresenta os valores obtidos com base na geometria quadárvore da figura 3b e os valores de referência [7], para uma configuração esfera-plano (fig. 3) em que $r_2/r_1 = \infty$ e $g/r_1 = 5$. As linhas equipotenciais obtidas estão visualizadas na figura 3c.

QUADRO 1 Configuração esfera-plano

$\frac{\ell/g}{com}$ $r2/r1 = \infty$ $g/r1 = 5$	POTENCIAL		CAMPO ELECTRICO	
	Referência	Calculado	Referência	Calculado
0.0	1.0000	1.0000	1.1173	1.2646
0.2	0.4383	0.4373	0.2857	0.2772
0.4	0.2432	0.2451	0.1353	0.1330
0.6	0.1367	0.1425	0.0855	0.0865
0.8	0.0625	0.0659	0.0661	0.0692
1.0	0.0000	0.0000	0.0608	0.0641

em elementos finitos. As propriedades dinâmicas da estrutura são também bastante úteis nas fases de composição de figuras e de geração de malha. A estrutura arborescente possibilita a construção de representações geométricas de resolução crescente com o nível da raiz da quadárvore, sendo o refinamento da precisão numérica da solução por elementos finitos igualmente progressiva. A principal limitação do modelo resulta da natureza espacialmente discreta ou digitalizada da aproximação geométrica das fronteiras dos objectos. Esta discretização assume especial importância em linhas de fronteira oblíquas em relação aos eixos coordenados, pois que a existência de reentrâncias introduz singularidades que afectam a precisão numérica final. Esta limitação pode ser grandemente minorada aumentando o refinamento de malha naquelas zonas de fronteira. O modelo foi testado na análise de configurações electródicas para problemas electrostáticos.

REFERÊNCIAS

- [1] O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, 3rd ed., McGraw-Hill, 1977.
- [2] H. Samet, The quadtree and related hierarchical data

Conclusões

O modelo de representação quadárvore-região, que se apresentou, elabora uma representação geométrica discreta dos objectos, por decomposição espacial hierárquica recursiva. A facilidade de integração do modelo com técnicas e procedimentos usados em computação gráfica e processamento de imagem viabiliza a concepção integrada das fases de pré-processamento e pós-processamento para efeitos da automatização do processo de análise por elementos finitos. A possibilidade de alterar dinamicamente a árvore de representação, essencialmente por inserção e remoção de nós e sub-árvores, revela-se fundamental na eficiência e flexibilidade conseguidas na realização das técnicas de refinamento localizado de malha e control à-posteriori de erros próprios da análise adaptativa

- structures, ACM Comp. Surv., vol. 16, no. 2, pp. 187-260, June 1984.
- [3] P. P. Silvester and R. L. Ferrari, Finite Elements for Electrical Engineers, Cambridge University Press, 1983.
- [4] K. K. Ang and S. Valliapan, Mesh grading technique using modified shape functions and its application to wave propagation problems, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 23, pp. 331-348, 1986.
- [5] Adelino Silva, Contribuição para a integração de representação gráfica e análise em elementos finitos, Dissertação, UNL, 1989.
- [6] P. Moon and D. E. Spencer, Field Theory Handbook, Springer Verlag, 1961.
- [7] J. M. Mattingley and H. M. Ryan, Potential and potential gradient distributions for standard and practical electrode systems, Proc. IEE, vol. 118, no. 5, pp. 720-732, 1971.
- [8] A. S. Pillai and R. Hackam, Electric field and potential distributions for unequal sheres using symmetric and asymmetric applied voltages, IEEE Trans. on Electrical Insulation, vol. 18, no. 5, pp. 477-484, 1983.
- H. Singer, H. Steinbigler and P. Weiss, A charge simulation method for the calculation of high voltage fields, IEEE Trans. on Power App. and Syst., vol. 93, pp. 1660-1668, 1974.

379

Assine e leia a revista ELECTRICIDADE, uma publicação mensal em língua portuguesa, para docentes, estudantes, investigadores, profissionais de engenharia e empresários industriais.

ELECTRICIDADE - N.º 272 - NOVEMBRO 1990