

F. Sardinha
Eng. Electrotécnico

Transmissão Térmica nos Fenómenos Transitórios ou em Regime Permanente e sua equivalência com os das Redes Eléctricas

II - Transições Térmicas

resumo

O Autor analisa os fundamentos teóricos da transmissão térmica em fenómenos transitórios, seguindo o modelo de cálculo em linhas eléctricas. As conclusões são importantes para estudar efeitos terminais de reflexão (a seguir).

Thermal Transitions

summary

The Author analysis the theoretical principles of thermal transmission in transient phenomena, using the same model as normally is used to electrical line calculations. Conclusions are important to study reflexion effects (to be continued).

Logo que as distorções do sistema térmico ficam inalteráveis pode-se explicitar com maior detalhe as relações pelas quais as temperaturas e os fluxos térmicos ficam ligados [1].

Considerando ainda uma superfície semi-infinita, pode substituir-se q por $p c \cdot \beta T = p C T$, introduzindo-se aqui a noção de capacidade térmica linear

$$C = \frac{1}{\Delta} \quad (11)$$

e pode-se substituir também o fluxo térmico de fuga nos topos por uma expressão pondo em evidência uma condutibilidade lateral linear G tal que

$$q_r = G T \quad (12)$$

Ter-se-á assim para uma superfície qualquer

$$\frac{d q}{d x} = (p C + G) T \quad (13)$$

Por outro lado, pode-se ainda considerar a avaliação da temperatura dT/dx numa superfície constituída por duas camadas como sendo uma soma de duas parcelas:

- uma de natureza puramente resistiva definida por

$$\sum_{n=1}^{n=2} \frac{e_n}{\lambda_n} + (1 + \sqrt{\frac{\pi C_l \beta_l \lambda_l}{t_l}}) R_c$$

e correspondente a uma queda óhmica de tensão nos circuitos eléctricos;

- outra do tipo puramente indutivo definida por

$$j \sqrt{\frac{\pi C_l \beta_l \lambda_l}{t_l}} R_c$$

equivalente ao fluxo exterior e interior dos condutores nos circuitos eléctricos obtidos por $\phi = Li$.

A soma destas duas últimas expressões permite escrever

$$-\frac{\partial T}{\partial x} = \sum_{n=1}^{n=2} \frac{e_n}{\lambda_n} + (1 + \sqrt{\frac{\pi C_l \beta_l \lambda_l}{t_l}}) R_c + p \sqrt{\frac{\pi C_l \beta_l \lambda_l}{t_l}} R_c \quad (14)$$

As expressões (13) e (14) permitem pôr em evidência as seguintes equações:

• *Impedância térmica*

$$Z = \left[\sum_{n=1}^{n=2} \frac{e_n}{\lambda_n} + (1 + \sqrt{\frac{\pi C_l \beta_l \lambda_l}{t_l}}) R_c + j \sqrt{\frac{\pi C_l \beta_l \lambda_l}{t_l}} R_c \right] \quad (15a)$$

• *Admitância longitudinal*

$$Y = G + pC \quad (15b)$$

• *Admitância transversal*

$$Z = Z_{12} + Z_c \quad (15c)$$

onde

$$Z_{12} = R_{12} = \sum_{n=1}^{n=2} \frac{e_n}{\lambda_n} \quad (15d)$$

que é um valor resistivo puro, e ainda

$$Z_c = \left[1 + \sqrt{\frac{\pi C_l \beta_l \lambda_l}{t_l}} + j \sqrt{\frac{\pi C_l \beta_l \lambda_l}{t_l}} \right] R_c \quad (15e)$$

Consegue-se assim, trabalhando em analogia estreita com os fenómenos eléctricos, equivaler os fenómenos térmicos numa superfície qualquer em multi-camadas com uma linha eléctrica constituída por vários troços, designando-se por Zdx “em série” e Ydx em “paralelo”. Para que esta representação tenha significado físico é preciso que o comprimento elementar dx seja inferior ao comprimento limite expresso nas condições (3) e $2\pi\Delta x/d$ e então que dx seja tão pequeno que o fenómeno estudado seja de variação (no tempo t) mais rápida ou com a frequência mais elevada.

Uma equivalência do fenómeno térmico numa superfície multi-camada com uma linha será tanto mais fiel quanto mais parcializada for a sua representação.

Verifica-se assim pela figura 1, e tal como por outro desenvolvimento havíamos deduzido [2], o modelo análogo dum fenómeno térmico será mais aproximadamente representado por um filtro π e não em T como é corrente verificar-se em toda a literatura que conhecemos.

É evidente que tratando-se de fenómenos permanentes e tendo em consideração a expressão da impedância definida em (15a), o esquema indicado para a figura 1 simplificar-se-á por o valor t_l tender para infinito, ficando reduzido ao representado na figura 2.

Os fenómenos térmicos, tal como os fenómenos eléctricos, hidráulicos e pneumáticos (também acústicos), reflectem-se sobre obstáculos (zonas de transição). Nas linhas eléctricas as ondas são guiadas através dos condutores, onde os únicos obstáculos se verificam nas zonas de transição do tipo dos condutores e no fim das linhas. Nos fenómenos térmicos os obstáculos são os que se verificam nas superfícies livres (entrada e saída do sinal térmico) e nas superfícies de contacto das várias camadas.

Do simples facto da velocidade de transmissão das diversas camadas serem diferentes, as diferentes ondas reflectidas sucessivamente numa superfície multi-camada sobrepõem-se de forma mais ou menos complexa. Duas circunstâncias fundamentais simplificam o fenómeno.

A primeira é a natureza periódica eventual da onda injectada no caso onde o comprimento de onda correspondente ao período for igual ao sub-múltiplo da espessura da camada considerada, o que provocará um fenómeno de ressonância.

A segunda é a atenuação sempre crescente em função da frequência $\exp(-\gamma x)$ que elimina praticamente as frequências (harmónicas) mais elevadas após um certo tempo de percurso. De facto, estes dois fenómenos (tal como se verificam nas linhas eléctricas) após um número suficientemente fraco de reflexões origina que a forma das ondas seja vizinha da forma

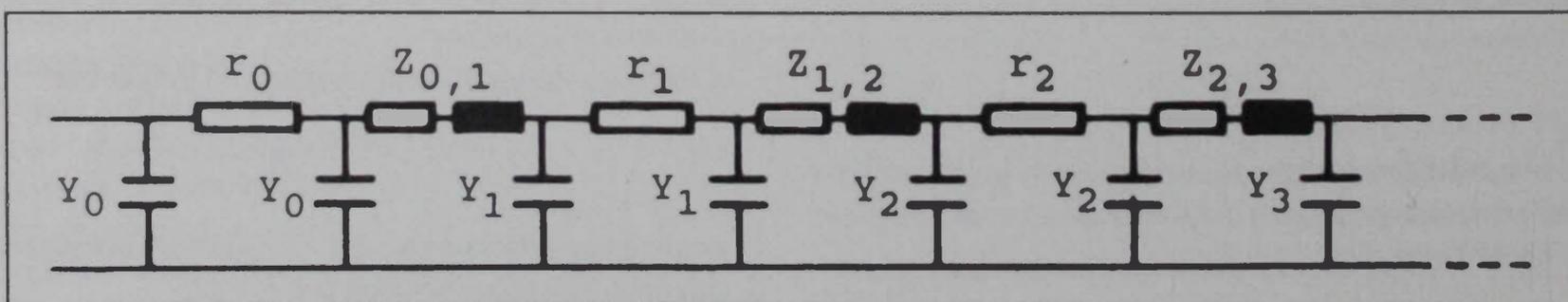


Fig. 1 - Esquema equivalente do fenómeno térmico.

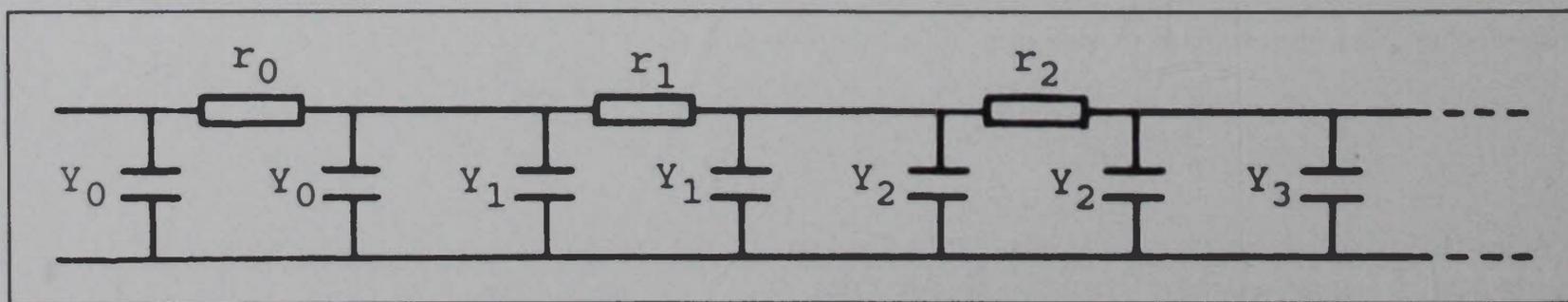


Fig. 2 - Esquema equivalente de um fenómeno térmico permanente.

sinusoidal. Ela resulta do facto de que a sobreposição de frequências vizinhas, agrupadas em torno de valores privilegiados, se pode assimilar a frequências próprias. Verificar-se-á em muitos casos "pseudo-frequências", porque de facto o crescimento da atenuação com a frequência e as alternâncias sucessivas corresponderão a uma frequência média mais ou menos variável e de valor decrescente.

Enquanto a ordem de grandeza destas "pseudo-frequências próprias" das redes eléctricas são conhecidas dos especialistas, nada se conhece no respeitante aos fenómenos térmicos em paredes homogêneas de larga aplicação, não só na indústria da construção civil nacional como no estrangeiro. Dever-se-á aqui deixar perfeitamente esclarecido que esta afirmação da existência de "pseudo-frequências próprias" nos fenómenos térmicos é da exclusiva responsabilidade do autor, uma vez que não se conhece literatura técnica mencionando explicitamente estes fenómenos térmicos e a tal conclusão termos chegado apenas pela análise das analogias entre os fenómenos eléctricos e os térmicos e não por efectivação de quaisquer trabalhos laboratoriais (os quais não nos são acessíveis).

Nas redes eléctricas a noção de frequência própria é mais frequentemente utilizada pela noção da tensão transitória de restabelecimento da rede (tão útil na análise das redes), que põe em evidência a inclinação e a forma precisa do crescimento da tensão entre duas partes da rede separada pela abertura dum disjuntor.

Toda a variação no tempo e no espaço, relativamente a um ponto interior ou exterior dum corpo (placa para a situação que nos interessa), originada por uma causa qualquer, dará origem a uma concentração ou a uma rarefacção de energia térmica nesse ponto que se vai repercutir no espaço envolvente e assim vai originar uma onda térmica.

O estado térmico dum corpo será definido no ponto de abcissa x ao instante t pelo fluxo térmico que atravessa a secção considerada e pela sua temperatura. Estas duas grandezas, tal como demonstramos em [1], bastam com efeito para a onda térmica progredir à volta dos pontos considerados.

O diferencial do fluxo térmico q e o da temperatura T num determinado ponto P , variando de forma periódica, originará que, a uma distância d do ponto em estudo considerada grande em relação ao comprimento de onda, os diferenciais térmico e o respectivo fluxo se anulem rapidamente logo que d aumenta indefinidamente. Verifica-se a "desfasagem no espaço" entre as variações sinusoidais da temperatura e do fluxo térmico e, considerada uma superfície semi-infinita, para que o plano da onda propagada no interior da camada seja segundo a normal à superfície, definir-se-á aqui esta como uma onda plana. A sua propagação será equivalente à que se verifica nas redes eléctricas, em que o fenómeno de propagação é determinado pelas variações do campo eléctrico e magnético, dando origem a potenciais retardados cuja representação será escrita segundo a função

$$V(x, t) = V(0, t - \frac{x}{v})$$

Tal como uma propagação eléctrica é guiada por uma linha monofásica de comprimento finito e fechada por uma impedância de carga, tal se verifica analogamente com a transmissão dum fenómeno térmico numa superfície semi-infinita.

Os fenómenos que se podem verificar num terminal das redes eléctricas em vazio (resistência de carga infinita) não têm equivalência nos fenómenos térmicos, uma vez que em qualquer das faces duma superfície semi-infinita considerada haverá sempre uma resistência de carga finita, equivalente às perdas que se registam simultaneamente por radiação e por convecção. Nos cálculos das cargas térmicas para uma instalação de climatização ou refrigeração haverá assim que entrar com as resistências térmicas correspondentes às duas faces de qualquer superfície e que não serão nunca nulas.

Correntemente e em linguagem técnica abreviada designamos essas resistências como funções exclusivas dos coeficientes de convecção externa e interna (por se considerar que as cargas térmicas devidas exclusivamente à radiação térmica dos casos em estudo são reduzidas em relação àquelas).

Nessas condições, as definições da temperatura e do fluxo térmico indicadas na equação (9) serão substituídas por

$$\left. \begin{aligned} T(x, p) &= T_1 \exp(-px/v) + T_2 \exp(+px/v) \\ q(x, p) &= q_1 \exp(-px/v) + q_2 \exp(+px/v) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

onde os coeficientes T_1, T_2, q_1 e q_2 serão ligados pelas seguintes relações

$$T_1 = Z_0 q_1 \quad (17a)$$

$$T_2 = -Z_0 q_2 \quad (17b)$$

sendo Z_0 a impedância térmica característica, também definida em [1].

Como as condições nas duas superfícies determinam ainda os coeficientes das expressões (16) e (17), escrever-se-á:

- Na face A de entrada ($x = 0$) com aplicação da temperatura $T_A(p)$ através duma impedância Z_A entreposta entre a fonte de temperatura e a espessura da superfície:

$$T_A(p) = Z_A(p) \cdot q(0, p) + T(0, p) \quad (18)$$

pelo que

$$[Z(p) + Z_0]q_1(p) + [Z_A(p) - Z_0]q_2(p) = T_A(p) \quad (19)$$

- Na face B (para $x = X$) a temperatura $T(x, p)$ é aplicada à impedância $Z_B(p)$ onde é debitado o fluxo térmico $q(x, p)$:

$$T(x, p) = Z_B(p) q(X, p)$$

pelo que

$$[Z_B(p) - Z_0] q_1 \exp(-pX/v) + [Z_B(p) + Z_0] q_2 \exp(+pX/v) = 0 \quad (21)$$

O desenvolvimento das expressões anteriores, entrando em consideração com as impedâncias Z_A e Z_B , permite obter as relações (22 a,b):

$$\left. \begin{aligned}
 q_1(p) &= T_A(p) \frac{(Z_0 + Z_B) \exp(+pX/v)}{D_1} \\
 \text{com:} \\
 D_1 &= (Z_0 + Z_A)(Z_0 - Z_B) \exp(pX/v) - \\
 &\quad -(Z_0 + Z_A)(Z_0 - Z_B) \exp(-pX/v)
 \end{aligned} \right\} (22a)$$

$$\left. \begin{aligned}
 T(x, j\omega) &= T(0, j\omega) \cos \frac{\omega x}{v} - \\
 &\quad - jZ_0 q(0, j\omega) \sin \frac{\omega x}{v} \\
 q(x, j\omega) &= -\frac{j}{Z_0} T(0, j\omega) \sin \frac{\omega x}{v} + \\
 &\quad + q(0, j\omega) \cos \frac{\omega x}{v}
 \end{aligned} \right\} (27)$$

$$\left. \begin{aligned}
 q_2(p) &= T_A(p) \frac{(Z_0 + Z_B) \exp(-pX/v)}{D_2} \\
 \text{com:} \\
 D_2 &= (Z_0 + Z_A)(Z_0 + Z_B) \exp(pX/v) - \\
 &\quad -(Z_0 - Z_A)(Z_0 - Z_B) \exp(-pX/v)
 \end{aligned} \right\} (22b)$$

O fluxo térmico e a temperatura em qualquer ponto P de abscissa x será então obtido pelas expressões (23).

Este sistema de equações poderá ainda ser escrito na sua forma mais geral (24), que é inteiramente análoga às expressões aplicadas no cálculo das redes eléctricas.

Conforme a teoria das transformadas de Laplace [2], sendo p um valor real positivo, o segundo termo do denominador das equações do sistema anterior é inferior a 1, pelo que desenvolvendo em série se obtêm as expressões (25).

A interpretação física destas últimas expressões põe em evidência a série de ondas que se reflectem alternativamente em cada uma das extremidades, de forma que em consequência se obtêm uma transformação muito mais complexa.

Só se considerar um regime permanente sinusoidal em que $p = j\omega$, as expressões (23) transformam-se nas equações (26) e destas últimas expressões resultam as fórmulas (27).

Foi perfeitamente salientada a submissão dum ponto numa superfície a uma variação brusca da temperatura e foi posta em evidência a diferença das reflexões na face de entrada e na face de saída do sinal. As expressões (25) mostraram as diferenças que subsistem.

Vejamos agora, em analogia com o que se verifica nas redes eléctricas nas zonas de transição de dois tipos de condutores (linhas aéreas para cabos subterrâneos ou vice-versa) o que se passará com um fenómeno termodinâmico na zona de transição dum camada para outra dada superfície.

O coeficiente de reflexão numa linha eléctrica é definido por [1]

$$K = \frac{Z_A - Z_B}{Z_A + Z_B} \quad (28)$$

enquanto que num fenómeno termodinâmico a definição por analogia para a impedância característica térmica determinará

$$Z_0 = \sqrt{\frac{1}{j \beta C \lambda}} \quad (29)$$

Eqs. (23):

$$T(x, p) = T_A(p) \frac{Z_0(Z_0 + Z_B) \exp[(p/v)(X-x)] - Z_0(Z_0 - Z_B) \exp[-(p/v)(X-x)]}{(Z_0 + Z_A)(Z_0 + Z_B) \exp(pX/v) - (Z_0 + Z_A)(Z_0 + Z_B) \exp(-pX/v)}$$

$$q(x, p) = T_A(p) \frac{(Z_0 + Z_B) \exp[(p/v)(X-x)] + (Z_0 - Z_B) \exp[-(p/v)(X-x)]}{(Z_0 + Z_A)(Z_0 + Z_B) \exp(pX/v) - (Z_0 - Z_A)(Z_0 - Z_B) \exp(-pX/v)}$$

Eqs. (24):

$$T(x, p) = T_A(p) \frac{Z_0}{(Z_0 + Z_A)} \cdot \frac{\exp[-(px/v)] - \frac{Z_0 - Z_A}{Z_0 - Z_B} \exp[-(p/v)(2X-x)]}{1 - \frac{Z_0 - Z_A}{Z_0 + Z_A} \cdot \frac{Z_0 - Z_B}{Z_0 - Z_B} \exp[-2pX/v]}$$

$$T(x, p) = T_A(p) \frac{1}{Z_0 + Z_A} \cdot \frac{\exp[-(px/v)] - \frac{Z_0 - Z_B}{Z_0 + Z_B} \exp[-(p/v)(2X-x)]}{1 - \frac{Z_0 - Z_A}{Z_0 + Z_A} \cdot \frac{Z_0 - Z_B}{Z_0 + Z_B} \exp(-2pX/v)}$$

Eqs. (25):

$$T(x, p) = T_A(p) \frac{Z_0}{Z_A + Z_0} \left\{ \exp(-px/v) + \frac{Z_B - Z_0}{Z_B + Z_0} \exp[-(p/v)(2X - x)] \right\} \sum_{m=0}^{m=\infty} \left(\frac{Z_A - Z_0}{Z_A + Z_0} \cdot \frac{Z_B - Z_0}{Z_B + Z_0} \right)^m \exp[-2m(pX/v)]$$

$$q(x, p) = \frac{T_A(p)}{Z_A + Z_0} \left\{ \exp(-px/v) - \frac{Z_B - Z_0}{Z_B + Z_0} \exp[-(p/v)(2X - x)] \right\} \sum_{m=0}^{m=\infty} \left(\frac{Z_A - Z_0}{Z_A + Z_0} \cdot \frac{Z_B - Z_0}{Z_B + Z_0} \right)^m \exp[-2m(pX/v)]$$

Eqs. (26):

$$T(x, j\omega) = T_A(j\omega) \cdot \frac{jZ_0 \sin(\omega/v)(X-x) + Z_B \cos(\omega/v)(X-x)}{jZ_0 \sin(\omega X/v) + Z_B \cos(\omega X/v)}$$

$$q(x, j\omega) = \frac{T_A(j\omega)}{Z_0} \cdot \frac{jZ_0 \cos(\omega/v)(X-x) + jZ_B \sin(\omega/v)(X-x)}{jZ_0 \sin(\omega X/v) + Z_B \cos(\omega X/v)}$$

pele que virá o coeficiente de reflexão térmica vem

$$b = \frac{1/\sqrt{\beta_A C_A \lambda_A} - 1/\sqrt{\beta_B C_B \lambda_B}}{1/\sqrt{\beta_A C_A \lambda_A} + 1/\sqrt{\beta_B C_B \lambda_B}} \quad (30)$$

Seguindo-se a orientação de cálculo para a dedução das expressões anteriores, e que aqui se prescinde de apresentar para não alongar a descrição, determinam-se as expressões que definem a temperatura e o fluxo na zona de transição para o caso em que se submete a superfície de entrada de sinal a uma variação brusca da temperatura, para T_0 , conforme as expressões (31).

$$\left. \begin{aligned} T(x, p) &= \frac{1}{p} T_0 \cdot \frac{\exp[-px/v] - b \cdot \exp[-(p/v)(2X - x)]}{1 - b \cdot \exp[-(p/v)2X]} \\ q(x, p) &= \frac{1}{p} \cdot \frac{T_0}{Z_0} \cdot \frac{\exp[-px/v] + b \cdot \exp[-(p/v)(2X - x)]}{1 - b \cdot \exp[-(p/v)(2X - x)]} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Interessa deduzir as expressões anteriores para os tempos $t=0$ e $t=\infty$.

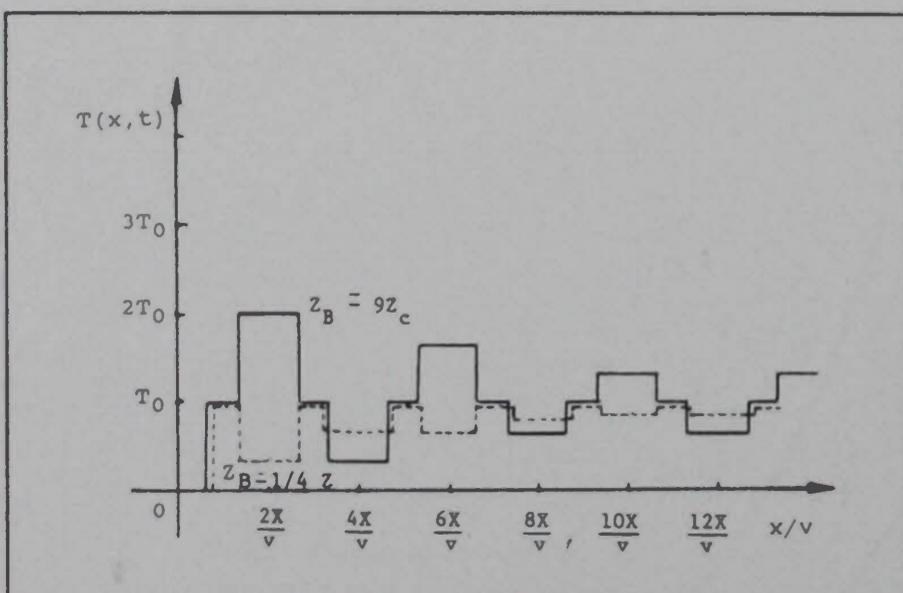


Fig. 3 - Representação gráfica da temperatura $T(x,t)$ em função de x/v .

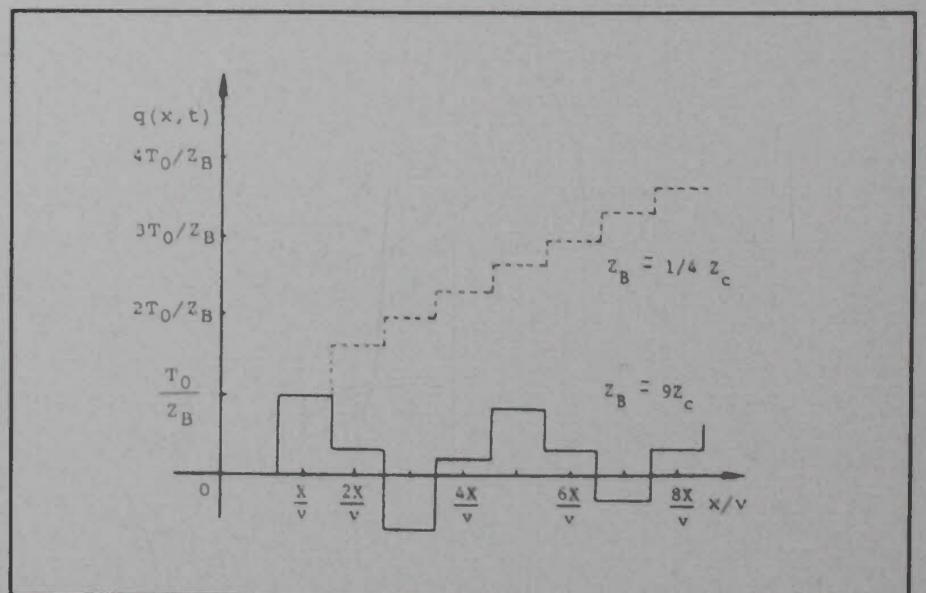


Fig. 4 - Representação gráfica do fluxo térmico $q(x,t)$ em função de x/v .

Nos gráficos apresentados nas figuras 3 e 4, onde o traço contínuo representa a temperatura ou o fluxo térmico na face da entrada do impulso e o traço pontilhado as mesmas grandezas na zona de transição da saída, representam-se essas grandezas num ponto P da superfície de transição Z, definida anteriormente (15e).

Segundo a teoria das transformadas de Laplace virá, respectivamente, para $p=\infty$ e $p=0$.

Assim, será

- para $t = 0$

$$T(x, \infty) = 0$$

$$q(x, \infty) = 0$$

salvo para $x = 0$ porque então o produto px é indeterminado.

- para $t = \infty$:

$$T(x, 0) = T_0 \quad (32a)$$

$$q(x, 0) = \frac{T_0}{Z_0} \cdot \frac{1+b}{1-b} = \frac{T_0}{Z} \quad (32b)$$

Este regime final é atingido após uma série de impulsos amortecidos, tal como representam os gráficos das figuras 3 e 4 para diferentes valores da resistência Z_R . ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] F. Sardinha, *Analogia entre os fenómenos que ocorrem nas redes eléctricas e na transmissão térmica*, ELECTRICIDADE nº 182, Dez. 1982.

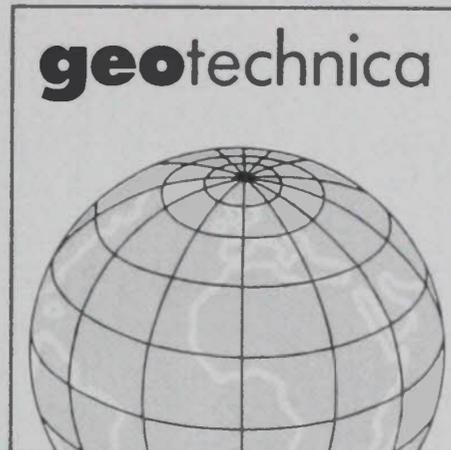
[2] M. Dennis, *Cours de Calcul Opérationnel*, Éditions Albin Michel.

Assine e Leia
a Revista

Electricidade

11 números em 1993
apenas por 4.750\$00
(incluindo IVA)

A TERRA DIZ RESPEITO A NÓS TODOS



Feira Profissional
Internacional
e Congresso
para Geociências
e Geotécnica

Cólonia, 5 a 8 de Maio
1993

A exploração do planeta terra e a preservação da sua geobiosfera requerem técnicas capazes de resolver os problemas existentes. A **geotechnica** assumiu o desafio de criar o palco internacional que proporciona a transparência necessária, os intercâmbios sensatos e as sinergias.

A **geotechnica** demonstra a interligação entre a ciência e a técnica, entre a economia e a geopolítica. Só a convergência destes sectores, a nível mundial, poderá resolver os problemas emergentes.

O Congresso-geotechnica realizar-se-á em paralelo à feira profissional. Informará sobre o mais recente nível da investigação e do desenvolvimento científico e técnico. O tema geral «A terra gasta – ecossistemas, matérias primas, desafios» reunirá 120 intervenientes, vindos de 16 países, que se debruçarão sobre os desafios à ciência e à técnica que resultam dos novos conceitos, processos e conhecimentos, tudo em prol da preservação da terra.

A Fundação Alfred-Wegener será a organizadora do congresso, tal como em 1991.

geotechnica '93

Um conceito que se impõe

- 20.000 m² de área de exposição ■ 500 expositores
- 20.000 visitantes profissionais, provenientes das áreas da geociência e da geotécnica

À Walter & Cia., Lda., Largo de Andaluz, 15, 39 Dt9-4, 1000 Lisboa

Cupão

- É favor enviar:
- Documentação de participação para expositores
 - Boletim de Inscrição para o Congresso
 - Informações gerais

Remetente: _____

 Köln Messe