

Resposta Impulsional de Sistemas Discretos

Hermínio Duarte-Ramos

Secção de Controlo e Decisão, Dep. Eng. Electrotécnica, FCT/UNL

1. Introdução

A transformada em z inversa da função de transferência $G(z)$ constitui a resposta impulsional $g(k)$ do respectivo sistema, porque

$$g(k) = Z^{-1} \left\{ G(z) \right\}$$

tem o significado particular de representar a saída do sistema à entrada de um impulso unitário $\delta(k)$. Este sinal de excitação só não é nulo no instante inicial, tendo amplitude igual a 1 para $k = 0$. Isto quer dizer que essa resposta possui a natureza de uma resposta livre, já que a respectiva resposta forçada é nula nos sistemas estáveis. Evidentemente, se tal resposta impulsional for ilimitada o sistema será instável. Aqui está, portanto, uma maneira imediata de testar a estabilidade limitada dos sistemas de controlo.

A metodologia de inversão da transformada $G(z)$ aplica-se a qualquer função no domínio da variável complexa z . Exemplificando, a resposta $u(k)$ de um controlador digital excitado pelo erro de controlo $e(k)$ obtém-se da transformação em z inversa de $U(z) = C(z) E(z)$, em que $C(z)$ é a função de transferência discreta do controlador.

Genericamente, um sistema de controlo digital, representado por $G(z)$, com a entrada $R(z)$ terá a saída $Y(z) = G(z)R(z)$, que se obtém no tempo discreto pela transformação em z inversa

$$y(k) = Z^{-1} \left\{ G(z) R(z) \right\}$$

seguindo os mesmos passos na determinação da resposta impulsional $g(k)$, quando o sistema $G(z)$ for excitado pelo impulso unitário $u(k) = \delta(k)$.

2. Cálculo da transformada em z inversa

Na prática, para efectuar a transformação em z inversa da função $G(z)$, que é uma fracção racional $G(z) = P(z)/Q(z)$, utiliza-se uma tabela de correspondências entre funções elementares nos domínios do tempo discreto k e da variável complexa z (Quadro 1 em [1]). Por isso, começa-se por fazer a decomposição em fracções parciais da função de transferência

$$G(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}, \quad n \geq m$$

o que exige a prévia factorização do denominador

$$Q(z) = (z - z_{p1}) (z - z_{p2}) \dots (z - z_{pn})$$

para identificar os n pólos z_{pi} , com $i = 1, 2, \dots, n$, que satisfazem a equação característica $Q(z) = 0$. Estes pólos podem ser simples (não repetidos) ou múltiplos (repetidos), reais nulos ou reais não-nulos, ou ainda complexos conjugados (em particular, imaginários conjugados).

Para um estudo exaustivo, analisam-se estes diferentes casos.

1º caso: Pólos simples reais não-nulos

Se os pólos forem todos reais distintos e diferentes de zero será $z_{pi} \neq z_{pj}$ para $i \neq j$ e com $z_{pi} \neq 0$, pelo que a decomposição em fracções parciais assume a forma

$$G(z) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1 z}{z - z_{p1}} + \frac{\alpha_2 z}{z - z_{p2}} + \dots + \frac{\alpha_n z}{z - z_{pn}}$$

Como $G(z)$ não possui nenhum pólo nulo, o cálculo de $G(z)$ para $z = 0$ não anula nenhum dos denominadores destas fracções e todos os numeradores com z resultam iguais a zero, dando

$$\alpha_0 = G(0) = \lim_{z \rightarrow 0} G(z)$$

Os restantes factores α_i , com $i = 1, 2, \dots, n$, obtêm-se pelo limite para o correspondente pólo segundo a expressão

$$\alpha_i = \lim_{z \rightarrow z_{pi}} \frac{z - z_{pi}}{z} G(z)$$

visto que a multiplicação de $G(z)$ por $(z - z_{pi})/z$ dá

$$\begin{aligned} \frac{z - z_{pi}}{z} G(z) &= \alpha_0 \frac{z - z_{pi}}{z} + \frac{\alpha_1 z}{z - z_{p1}} \cdot \frac{z - z_{pi}}{z} + \dots \\ &\dots + \frac{\alpha_i z}{z - z_{pi}} \cdot \frac{z - z_{pi}}{z} + \dots \\ &\dots + \frac{\alpha_n z}{z - z_{pn}} \cdot \frac{z - z_{pi}}{z} \end{aligned}$$

cujo limite para $z = z_{pi}$ só não anula a parcela do 2º membro relativa ao pólo z_{pi} , donde se deduz o factor α_i (como se indicou).

Uma vez calculados todos os factores α_i , a transformada inversa de cada fracção parcial resultante da decomposição de $G(z)$ fornece, conforme a tabela de transformadas elementares,

$$g(k) = \alpha_0 \delta(k) + \alpha_1 z_{p1}^k + \dots + \alpha_n z_{pn}^k, \quad k \geq 0$$

em que a primeira parcela se desvanece no tempo (pelo crescimento de k) e as restantes parcelas definem um somatório de exponenciais discretas.

Ora, como se verifica $k \geq 0$, a resposta impulsional $g(k)$ desvanece para zero se todos os pólos z_{pi} , com $i = 1, 2, \dots, n$, tiverem módulo inferior à unidade, significando estabilidade do sistema. Se um dos pólos for igual à unidade, a respectiva parcela resulta constante, implicando um sistema marginalmente estável. E basta que um dos pólos reais tenha módulo superior à unidade para que a correspondente exponencial cresça indefinidamente, significando instabilidade do sistema.

Em qualquer situação, os pólos positivos dão valores discretos sobre exponenciais positivas e os pólos negativos originaram contribuições exponenciais alternadamente positivas e negativas, consoante a paridade do instante k (expoente dos pólos na resposta exponencial).

2º caso: Pólos simples complexos conjugados

Os pólos complexos aparecem sempre aos pares conjugados. Assim, analisa-se apenas a contribuição de um par de pólos complexos conjugados z_{pc} e z_{pc}^* , pois outro par distinto terá idêntico tratamento. Nestas condições, a decomposição de $G(z)$ em fracções parciais exprime-se por

$$G(z) = c_0 + \frac{c z}{z - z_{pc}} + \frac{c^* z}{z - z_{pc}^*}$$

verificando-se, como atrás,

$$c_0 = G(0)$$

$$c = \lim_{z \rightarrow z_{pc}} \frac{z - z_{pc}}{z} G(z)$$

$$c^* = \lim_{z \rightarrow z_{pc}^*} \frac{z - z_{pc}^*}{z} G(z)$$

donde vem a resposta impulsional

$$g(k) = c_0 \delta(k) + c z_{pc}^k + c^* z_{pc}^{*k}, \quad k \geq 0$$

Este resultado corresponde à soma da primeira componente, que se desvanece no tempo, com outra componente sinusoidal. De facto, os complexos $c = a + jb$ e $z_{pc} = |z_{pc}| e^{j\theta}$ com os seus conjugados deixam escrever $c z_{pc}^k + c^* z_{pc}^{*k}$ sob a forma

$$\begin{aligned} (a + jb)|z_{pc}|^k e^{jk\theta} + (a - jb)|z_{pc}|^k e^{-jk\theta} &= \\ &= |z_{pc}|^k (2a \cos k\theta + 2b \sin k\theta) \end{aligned}$$

mas como $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e fazendo $\tan \psi = b/a$, se for $\cos \psi = a/|c|$ e $\sin \psi = b/|c|$, calcula-se

$$g(k) = c_0 \delta(k) + 2|c| \cdot |z_{pc}|^k (\cos \psi \cos k\theta - \sin \psi \sin k\theta)$$

ou ainda

$$g(k) = c_0 \delta(k) + 2|c| \cdot |z_{pc}|^k \cos(k\theta + \psi)$$

que pode assumir uma formulação sinusoidal introduzindo a fase inicial $\varphi = \psi + \pi/2$, porquanto se deduz

$$g(k) = c_0 \delta(k) + 2|c| \cdot |z_{pc}|^k \sin(k\theta + \varphi)$$

um resultado que traduz a sobreposição de uma constante c_0 no instante inicial (pois $\delta(0) = 1$ e $\delta(k) = 0$ para $k \neq 0$) e uma oscilação sinusoidal discreta de frequência ω , tal que $k\theta = \omega k T_a$ (sendo T_a o período de amostragem), e desfasagem φ (ou fase inicial, para $k = 0$), possuindo a amplitude um valor de pico $2|c| \cdot |z_{pc}|^k$, que se amortece no tempo se for $|z_{pc}| < 1$ (sistema estável), mantém-se constante quando $|z_{pc}| = 1$ (sistema marginalmente estável) ou cresce indefinidamente para $|z_{pc}| > 1$ (sistema instável).

Dado que o argumento do seno é $k\theta + \varphi$, a frequência da oscilação define-se por

$$\omega = \frac{\theta}{T_a}$$

onde φ é o ângulo do argumento do pólo de expressão $z_{pc} = |z_{pc}| e^{j\theta}$, com $0 \leq \theta \leq \pi$ rad. A relação anterior mostra que quanto maior for θ maior será a frequência da oscilação discreta. Por isso, os pólos complexos de parte real negativa contribuem para a resposta com componentes oscilatórias de frequência superior à dos pólos complexos de parte real positiva, sendo a frequência tanto maior quanto mais os pólos se afastarem do eixo imaginário $j\omega$ (parte real dos pólos mais negativa).

Note-se ainda que a frequência de oscilação ω é inversamente proporcional ao período de amostragem, ou seja, varia proporcionalmente à frequência de amostragem $f_a = 1/T_a$. Deste modo, um sistema com dinâmica lenta, como um sistema térmico, que é discretizado com grande período de amostragem, exibe um carácter oscilatório nos pólos complexos com menor frequência que nos sistemas de dinâmica rápida (discretização de menor período).

3º caso: Pólos múltiplos reais não-nulos ou complexos conjugados

Seja agora um pólo múltiplo não-nulo z_{pq} de multiplicidade igual a q . Se houver mais de um pólo deste tipo procede-se de maneira idêntica com cada pólo. A decomposição em fracções parciais assume a forma

$$G(z) = \beta_0 + \frac{\beta_1 z}{z - z_{pq}} + \frac{\beta_2 z}{(z - z_{pq})^2} + \dots + \frac{\beta_q z}{(z - z_{pq})^q}$$

que fornece imediatamente

$$\beta_0 = G(0)$$

enquanto os restantes coeficientes β_1 a β_q se determinam pelo raciocínio exposto para os pólos simples reais não-nulos, através da multiplicação de $G(z)$ por $(z - z_{pq})^q / z$ para obter β_q e reduzindo a ordem da expressão pela sua derivada, a fim de calcular, sucessivamente, $\beta_{q-1}, \dots, \beta_1$ (aplicando o mesmo método).

Com vista a simplificar a descrição, atende-se às fracções parciais sem a parcela constante β_0 , porque este valor não altera o raciocínio de cálculo dos outros coeficientes. Assim

$$\begin{aligned} \frac{(z - z_{pq})^q}{z} G(z) &= \frac{\beta_1 z}{z - z_{pq}} \cdot \frac{(z - z_{pq})^q}{z} + \\ &+ \frac{\beta_2 z}{(z - z_{pq})^2} \cdot \frac{(z - z_{pq})^2}{z} + \dots \\ &+ \frac{\beta_{q-1} z}{(z - z_{pq})^{q-1}} \cdot \frac{(z - z_{pq})^q}{z} + \frac{\beta_q z}{(z - z_{pq})^q} \cdot \frac{(z - z_{pq})^q}{z} = \\ &= \beta_1 (z - z_{pq})^{q-1} + \beta_2 (z - z_{pq})^{q-2} + \dots + \beta_{q-1} (z - z_{pq}) + \beta_q \end{aligned}$$

pelo que se deduz

$$\beta_q = \lim_{z \rightarrow z_{pq}} \frac{(z - z_{pq})^q}{z} G(z)$$

A primeira derivada da expressão anterior em ordem a z reduz um grau, obtendo-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z - z_{pq})^q}{z} G(z) \right] &= (q-1) \beta_1 (z - z_{pq})^{q-2} + \\ &+ (q-2) \beta_2 (z - z_{pq})^{q-3} + \dots + 2\beta_{q-2} (z - z_{pq}) + \beta_{q-1} \end{aligned}$$

donde vem

$$\beta_{q-1} = \lim_{z \rightarrow z_{pq}} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z - z_{pq})^q}{z} G(z) \right]$$

A segunda derivada e seguintes permitem induzir a fórmula geral

$$\beta_{q-i} = \lim_{z \rightarrow z_{pq}} \frac{1}{i} \cdot \frac{d^i}{dz^i} \left[\frac{(z - z_{pq})^q}{z} G(z) \right]$$

com $i = 0, 1, 2, \dots, q-1$ para se determinar, sucessivamente, os valores de $\beta_q, \beta_{q-1}, \dots, \beta_2$ e β_1 .

Após o cálculo de todos os coeficientes das fracções parciais efectua-se a transformação em z inversa de $G(z)$, atendendo a que $z/(z-z_{pq})$ dá z_{pq}^k , a relação $z/(z-z_{pq})^2$ corresponde a kz_{pq}^{k-1} e assim por diante, até $[1/(q-1)!] k(k-1) \dots (k-q+2) z_{pq}^{k-q+1}$, para $k \geq 0$. Deste modo, resulta

$$g(k) = \beta_0 \delta(k) + \beta_1 z_{pq}^k + \beta_2 k z_{pq}^{k-1} + \beta_3 \frac{1}{2} k(k-1) z_{pq}^{k-2} + \dots \\ \dots + \beta_q \frac{1}{(q-1)!} \prod_{i=0}^{q-2} (k-i) z_{pq}^{k-q+1}, \quad k \geq 0$$

vendo-se que a resposta impulsional não desvanece para zero ao longo do tempo, porquanto aparecem parcelas proporcionais ao tempo.

Daqui conclui-se que um sistema com pólos múltiplos reais não-nulos é necessariamente instável. Compreende-se também que o mesmo acontece na multiplicidade de pares de pólos conjugados.

Manifesta-se igualmente evidente que a multiplicidade $q = 1$ degenera no caso do pólo simples.

4º caso: Pólo nulo simples ou múltiplo

Quando existem pólos iguais a zero numa multiplicidade qualquer q (incluindo o caso particular $q = 1$) a expressão de $G(z)$ em fracções parciais tem a forma

$$G(z) = \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + \dots + \frac{\gamma_q}{z^q}$$

com os coeficientes calculáveis, como anteriormente, por

$$\gamma_{q-i} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{i!} \cdot \frac{d^i}{dz^i} \left[z^q G(z) \right]$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, q$.

Por isso, a transformação inversa dá a expressão no tempo discreto

$$g(k) = \gamma_0 \delta(k) + \gamma_1 \delta(k-1) + \dots + \gamma_q \delta(k-q), \quad k \geq 0$$

tratando-se da soma ponderada e finita de q impulsos (relativos a instantes sucessivos). É claro que estes impulsos desvanecem todos no tempo, pelo que o pólo simples ou múltiplo na origem (para $z = 0$) não introduz instabilidade no sistema.

Anote-se que um sistema do tipo integral possui um único pólo na origem ($q = 1$), sendo então $g(k) = \gamma_0 \delta(k) + \gamma_1 \delta(k-1)$, uma resposta impulsional formada por dois impulsos finitos.

5º caso: Combinação dos casos anteriores

Em geral, a função de transferência discreta $G(z)$ apresenta diversos tipos de pólos. A resposta impulsional, devido à hipótese admitida de linearidade dos sistemas, equivale à sobreposição das contribuições de todos os pólos, conforme os casos atrás analisados.

3. Exemplo numérico

A aparente complexidade das fórmulas deduzidas justifica que se observe um exemplo numérico, pelo qual se realça a simplicidade do cálculo prático da transformação inversa do domínio z para o domínio discreto k .

Um sistema com a função de transferência

$$G(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{z^3 + 4z^2 + 3z + 2}$$

possui dois zeros (1 e 2) e três pólos (um simples -2 e outro duplo -1), dando então a factorização do numerador e do denominador

$$G(z) = \frac{(z-1)(z-2)}{(z+2)(z+1)^2}$$

A decomposição em fracções parciais terá a forma

$$G(z) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1 z}{z+2} + \frac{\beta_1 z}{z+1} + \frac{\beta_2 z}{(z+1)^2}$$

onde as duas primeiras parcelas se devem ao pólo simples real não-nulo (-2) e as duas últimas parcelas resultam do pólo duplo real (-1).

A análise efectuada anteriormente permite calcular os factores referentes ao pólo simples

$$\alpha_0 = G(0) = \frac{(z-1)(z-2)}{(z+2)(z+1)^2} \Big|_{z=0} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\alpha_1 = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{z+2}{z} G(z) = \frac{(z-1)(z-2)}{z(z+1)^2} \Big|_{z=-2} = \frac{12}{-2} = -6$$

e os coeficientes relativos ao pólo duplo

$$\beta_2 = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z+2)^2}{z} G(z) = \frac{(z-1)(z-2)}{z(z+2)} \Big|_{z=-1} = \frac{6}{-1} = -6$$

$$\beta_1 = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z+1)^2}{z} G(z) \right]$$

mas como

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{(z-1)(z-2)}{z(z+2)} \right] = \frac{5z^2 - 4z - 4}{z^2(z+2)}$$

vem

$$\beta_1 = \frac{5z^2 - 4z - 4}{z^2(z+2)^2} \Big|_{z=-1} = \frac{5}{1} = 5$$

resultando a função de transferência decomposta em fracções parciais

$$G(z) = 1 - \frac{6z}{z+2} + \frac{5z}{z+1} - \frac{6z}{(z+1)^2}$$

que fornece a resposta impulsional

$$g(k) = \delta(k) - 6(-2)^k + 5(-1)^k - 6k(-1)^{k-1}$$

Deste resultado observa-se que o sistema é instável: porque o polo simples tem módulo superior à unidade, os valores $(-2)^k$ crescem com $k > 0$; porque o pólo duplo não é nulo, o factor $6k$ cresce sempre com k .

4. Estabilidade de amplitude limitada

A análise elaborada permite interpretar as condições de estabilidade do comportamento dinâmico dos sistemas discretos lineares, sob o ponto de vista da estabilidade de amplitude limitada⁽¹⁾, definida por um sinal de resposta limitada quando o sinal de entrada do sistema também for limitado.

Essas condições de estabilidade caracterizam-se pela localização dos pólos no plano da variável complexa z , relativamente à circunferência unitária (de raio igual a 1) concêntrica com a origem. O respectivo comportamento dinâmico observa-se pela resposta impulsiva (Fig. 1):

- Polos na origem:
 - Pólo nulo simples ou múltiplo: sistema estável.
- Pólos interiores (não-nulos) à circunferência unitária:
 - Pólos simples (reais ou complexos conjugados): estável.

(1) Em inglês diz-se estabilidade BIBO (*bounded input bounded output*).

- Pólos múltiplos (reais ou complexos conjugados): instável.

□ Pólos sobre a circunferência unitária:

- Pólos simples (reais ou complexos conjugados): marginalmente estável.
- Pólos múltiplos (reais ou complexos conjugados): instável.

□ Pólos exteriores à circunferência unitária:

- Pólos simples ou múltiplos: instável.

Os pólos reais dão contribuições exponenciais discretas na resposta impulsional: positivas nos pólos positivos; alternadamente positivas e negativas nos pólos negativos. Os pólos complexos conjugados apresentam sempre contribuições sinusoidais discretas: as evoluções no tempo são decrescentes com pólos interiores, constantes (discretamente) em pólos sobre a circunferência unitária e crescente nos pólos exteriores. De facto, o diagrama temporal da resposta impulsional evolui no tempo discreto conforme a localização dos pólos no plano da variável complexa, como mostra a "rosa de pólos simples" no plano z (Fig. 1):

□ Pólos simples reais:

- Pólo nulo: desvanecimento.
- Pólo interior positivo: exponencial positiva decrescente.
- Pólo interior negativo: exponenciais positiva e negativa decrescentes.
- Pólo unitário positivo: constante positiva.
- Pólo unitário negativo: constante positiva e negativa.
- Pólo exterior positivo: exponencial positiva crescente.
- Pólo exterior negativo: exponenciais positiva e negativa crescentes.

□ Pólos simples complexos conjugados:

- Pólos interiores: senoide decrescente.
- Pólos sobre a circunferência unitária: senoide constante.
- Pólos exteriores: senoide crescente.

□ Pólos múltiplos:

- Pólos nulos: desvanecimento.
- Pólos reais não-nulos: exponenciais crescentes.
- Pólos complexos conjugados: sinusoides crescentes.

Repare-se na diferente frequência de oscilação discreta para o mesmo período de amostragem, conforme a localização dos pólos no plano complexo.

Se a variável de entrada do sistema não for um impulso unitário discreto a resposta do sistema

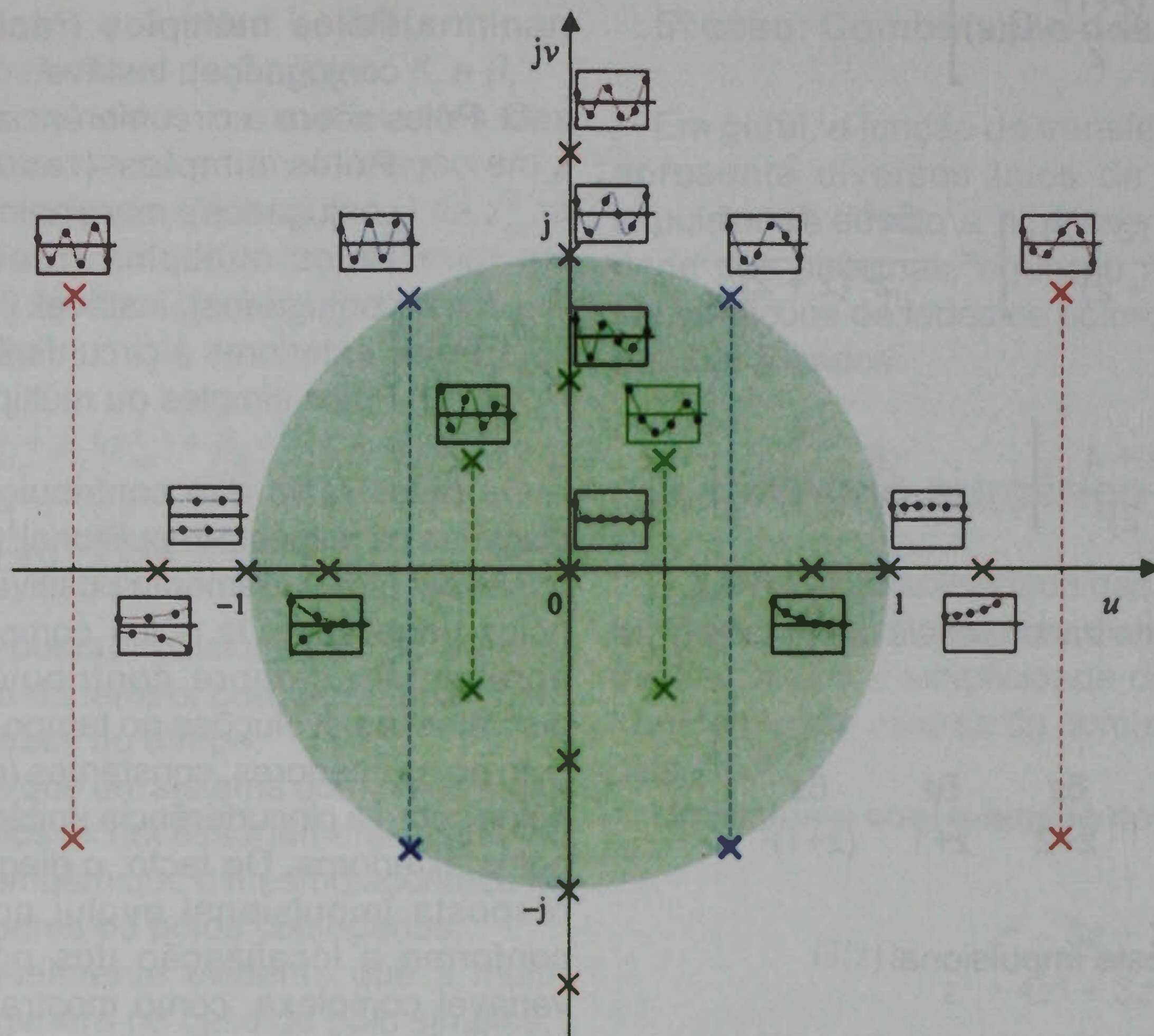


Fig. 1 - Rosa de pólos simples dos sistemas discretos, definida pela localização dos pólos típicos da estabilidade limitada e respectivos diagramas temporais.

resultará do processamento dinâmico interno a essa excitação, mas terá idênticas propriedades de estabilidade: o sistema é estável, marginalmente estável ou instável consoante a localização dos pólos da sua função de transferência no plano da variável complexa. E este comportamento prova-se intuitivamente pelo teste da resposta impulsional, como se viu, através da excitação de um impulso unitário.

Em resumo, a circunferência unitária no plano z significa para os sinais de tempo discreto (ou digitais) o que representa o eixo imaginário no plano s para os sinais de tempo contínuo (ou analógicos): a situação fronteira das condições de estabilidade e condições de instabilidade. De facto, existe uma correspondência rígida entre os domínios s e z , que convém investigar.

Revela-se uma certa correspondência entre a descrição no plano da frequência complexa s nos sistemas de tempo contínuo e no plano da variável complexa z nos sistemas de tempo discreto. Assim, a separação crítica das zonas de estabilidade e instabilidade identifica-se pelo eixo imaginário $j\omega$ de $s = \sigma + j\omega$ e a circunferência unitária em que $z = u + jv$ tem módulo igual a 1. A localização dos pólos, conforme impõe a função de transferência, estabelece as condições de estabilidade de amplitude limitada. É o que ilustra a chamada rosa dos pólos simples.

Mas convém aprofundar mais a relação entre os pólos nos dois planos s e z , que interliga os comportamentos dinâmicos dos sistemas analógicos e digitais equivalentes.

5. Conclusões

O conhecimento da resposta impulsional permite interpretar a estabilidade dos sistemas, a partir da função de transferência. Este raciocínio é idêntico nos sistemas analógicos e digitais, mas notam-se algumas particularidades, próprias do domínio de descrição desses sistemas.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Duarte-Ramos, *Função de Transferência Discreta de um Controlador Digital*, *Electricidade*, nº 383, Dez. 2000, p. 313-318.
- [2] H. Duarte-Ramos, *Fundamentos do Controlo Digital*, *Electricidade*, nº 379, Julho-Agosto 2000, p. 175-185.