Hermínio Duarte-Ramos
Universidade Nova de Lisboa (FCT)
hdr@unl.fct.pt

Discretização de Controladores Analógicos

RESUMO

Expõem-se as técnicas para discretizar um controlador de tempo contínuo (ou analógico) a fim de se construir um controlador de tempo discreto (ou digital).
Palavras-chave: *digitalização, métodos de Euler e de Tustin.*

PRINCÍPIO DE DISCRETIZAÇÃO DE CONTROLADORES POR AMOSTRAGEM

Uma maneira de dimensionar um controlador digital, durante a fase do seu projecto, consiste em efectuar a síntese de um controlador analógico, segundo os procedimentos conhecidos em tempo contínuo, e depois discretizar essa solução optimizada.

Na verdade, revela-se eficaz aplicar metodologias já confirmadas pela prática aos sistemas contínuos, como o diagrama de Bode ou a sintonização de Ziegler-Nichols, e a seguir discretizar o controlador analógico optimizado. Parte-se da função de transferência e usa-se um método de discretização que não introduza instabilidade, resultando a codificação binária do algoritmo de controlo, implementável num computador.

A vantagem deste procedimento reside no facto de ser possível utilizar conhecimentos adquiridos com sistemas de controlo analógico e chegar a um controlador digital sem dimensionar os seus parâmetros estruturais pela teoria dos sistemas discretos. Todavia, a discretização poderá introduzir instabilidades, se não se tiver o cuidado de observar o respectivo comportamento nas soluções mais simples. Daí o interesse em analisar e discutir os métodos de discretização geralmente aplicados.

A expressão algorítmica de controlo, implementável num computador (digital) a partir da função de transferência $C(s)$ de um controlador analógico (consequente da sua síntese em tempo contínuo), baseia-se no princípio de discretização por amostragem, segundo o qual a cascata de um conversor analógico-digital (A-D) e outro digital-analógico (D-A) não deforma praticamente os sinais convertidos (Fig. 1). Trata-se, evidentemente, de uma aproximação, que será tanto mais rigorosa quanto menor for o período de amostragem e mais lentas as variações temporais dos sinais.

Esta abordagem aplica-se a um sistema de controlo (Fig. 2a) considerando dois pares de

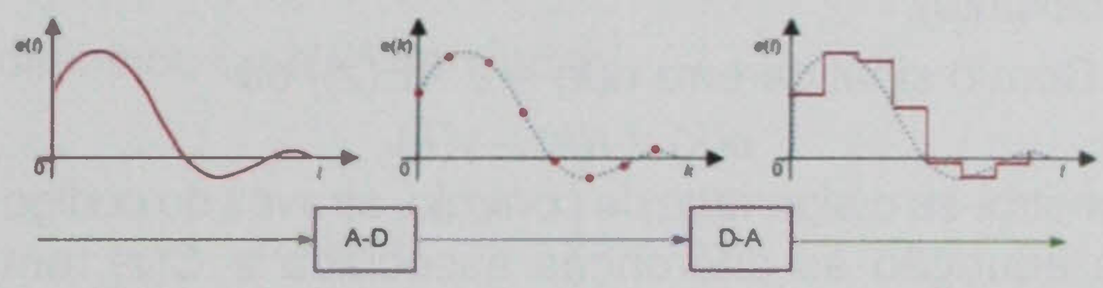


Fig. 1 - Princípio de discretização por amostragem.

conversores, um a montante e outro a jusante do controlador analógico (Fig. 2b). Nestas condições, a cascata do conversor D-A com o controlador $C(s)$ e o conversor A-D seguinte equivale à função de transferência amostrada $C(z)$, correspondente à expressão

$$C(z) = (1 - z^{-1})\, \mathcal{Z}\Sigma^{-1}\left\{\frac{C(s)}{s}\right\}$$

e daí o esquema de blocos híbrido com o controlador digitalizado e o processo analógico (Fig. 2c).

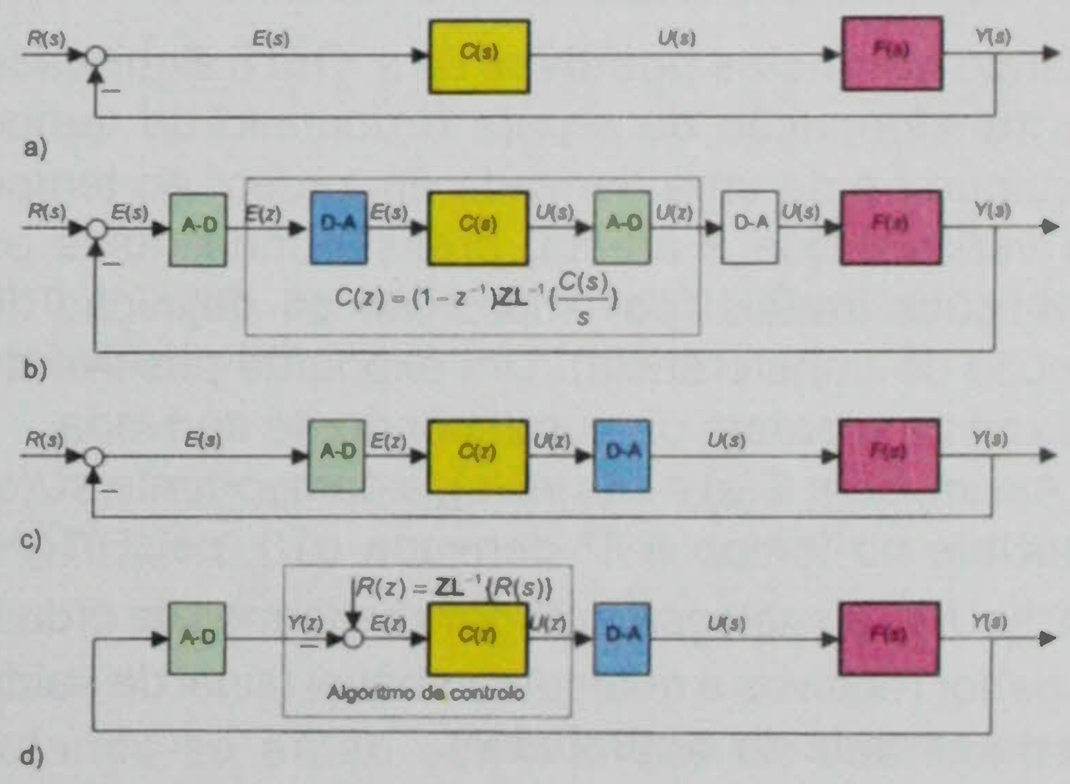


Fig. 2 - Esquema de blocos de um sistema de controlo com controlador discretizado.
a) Esquema básico de síntese do controlador analógico.
b) Aplicação do princípio de discretização do controlador analógico.
c) Esquema com o controlador discretizado.
d) Esquema com o controlador digital (algoritmo de controlo no computador).

A linearidade do conversor A-D deixa afirmar que a amostragem do sinal analógico $e(t) = r(t) - y(t)$ se pode exprimir por $e(k) = r(k) - y(k)$. De facto, a discretização de $E(s) = R(s) - Y(s)$ define $E(z)$ à entrada do controlador $C(z) = U(z)/E(z)$. No entanto, convém incluir a referência no algoritmo de controlo (Fig. 2 d), considerando apenas a discretização da retroacção negativa, referente ao sinal $-Y(z)$, adicionada à transformada em z correspondente à referência analógica $r(t) = \mathcal{L}^{-1}\{R(s)\}$, quer dizer, será $R(z) = \mathcal{Z}\mathcal{L}^{-1}\{R(s)\}$. Portanto é $E(z) = R(z) - Y(z)$, expressão da arquitectura normal de um sistema de controlo digital, tanto em seguimento como em regulação (caso este em que a perturbação $V(s)$ se insere à entrada de $F(s)$ do processo, sem alterar o raciocínio).

Com o sinal de erro $e(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{E(z)\}$ ou

$$e(k) = r(k) - y(k)$$

constrói-se o algoritmo de controlo, através do código da equação às diferenças associada a $C(z)$, em função das variáveis de entrada $u(k)$ e erro de controlo $e(k)$. Daí resulta o controlador digital.

ABORDAGENS DE DISCRETIZAÇÃO

Uma maneira de definir o procedimento de discretização parte da função de transferência do controlador analógico, com a forma geral

$$C(s) = \frac{B_m s^m + B_{m-1}s^{m-1} + \ldots + B_1 s + B_0}{s^n + A_{n-1}s^{n-1} + \ldots + A_1 s + A_0}, \quad n \geq m$$

usando **potências positivas** de s. Ora o significado da transformação de s para o domínio do tempo contínuo t é de uma derivada em ordem ao tempo da variável que s afecta, pressupondo nulas as condições iniciais (por imposição da definição de função de transferência). Um expoente positivo de s exprime a ordem da correspondente derivada.

Assim, com $C(s) = U(s)/E(s)$, a componente $sU(s)$ equivale no tempo à 1ª derivada $u'(t)$, pois $u'(t) = \mathcal{L}^{-1}\{sU(s)\}$, e analogamente para os termos de ordem superior relativos a qualquer variável (sinal de saída ou de entrada do controlador).

Nesta ordem de ideias, a abordagem da discretização depende do modo como as derivadas se aproximam por diferenças. Existem dois métodos de proceder (Fig. 3): num dado instante k considera-se a diferença da variável para o instante imediatamente seguinte $k+1$ (1º método de Euler) ou para o instante anterior $k-1$ (2º método de Euler).

Mas pode-se usar a função de transferência $C(s)$ expressa nas **potências negativas** de s, dividindo o numerador e o denominador por s^n, donde vem

$$C(s) = \frac{B_m s^{-d} + B_{m-1}s^{-d-1} + \ldots + B_1 s^{-n+1} + B_0 s^{-n}}{1 + A_{n-1}s^{-1} + \ldots + A_1 s^{-n+1} + B_0 s^{-n}}, \quad n \geq m$$

com o excesso de pólos $d = n - m$. Agora, o significado de $s^{-1} = 1/s$ no domínio do tempo é o integral da variável que afecta. Por exemplo, $s^{-1}U(s)$ transforma-se na integração $\int_0^t u(\tau)d\tau$, porque são nulas as condições iniciais e $\mathcal{L}^{-1}\{U(s)/s\} = \int_0^t u(\tau)d\tau$. Os expoentes mais negativos determinam integrais múltiplos, seguindo idêntico raciocínio.

Também neste caso se estabelecem diferentes métodos de discretização, consoante a construção do somatório equivalente ao integral discreto, à medida que se passa de um instante para outro ao ritmo do período de amostragem (Fig.4): num dado instante k considera-se o rectângulo dianteiro, com altura igual à amplitude da variável no instante anterior $k-1$; ou o rectângulo traseiro, com a altura da amplitude no próprio instante k; ou o trapézio definido pelas amplitudes k e $k-1$; a base é sempre o período de amostragem T_a.

Em qualquer caso, obtém-se uma função de transferência discreta

$$C(z) = \frac{b_m z^m + B_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}, \quad n \geq m$$

cujos coeficientes dependem dos coeficientes da expressão analógica e do período de amostragem T_a. Obviamente, cada método de discretização estabelece uma determinada relação entre s e z. A

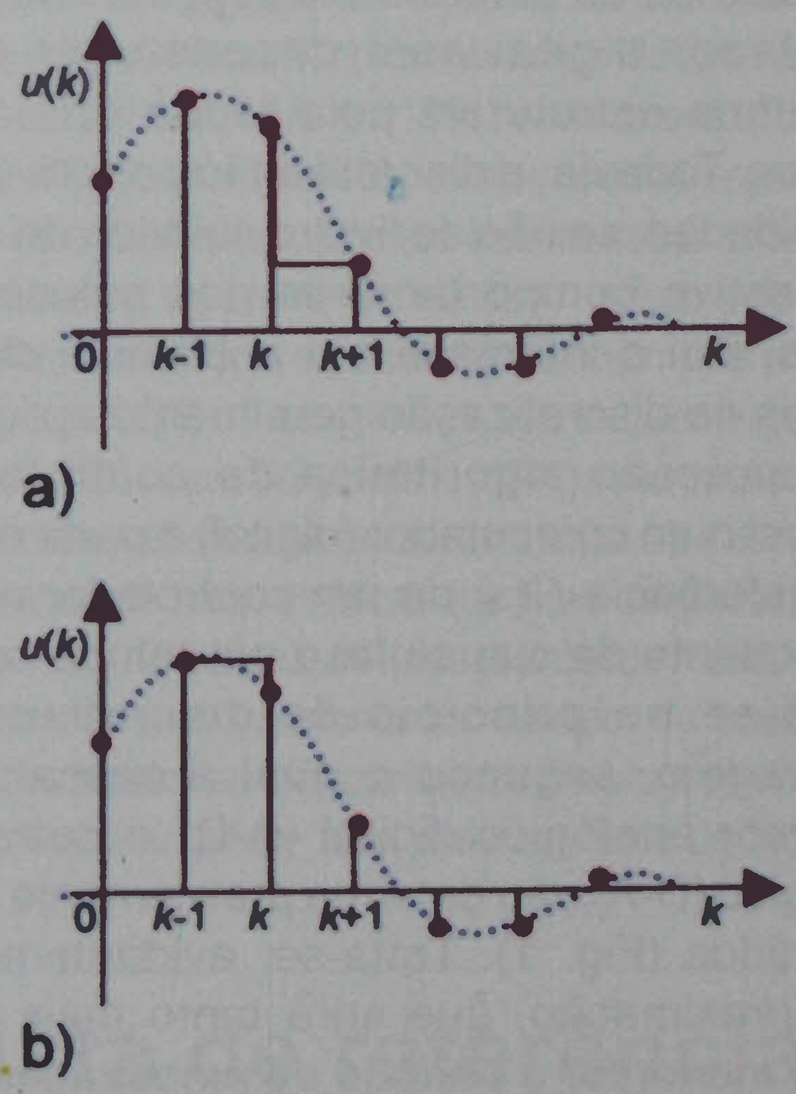


Fig. 3 - Abordagens de discretização por derivação.
a) 1º método de Euler.
b) 2º método de Euler.

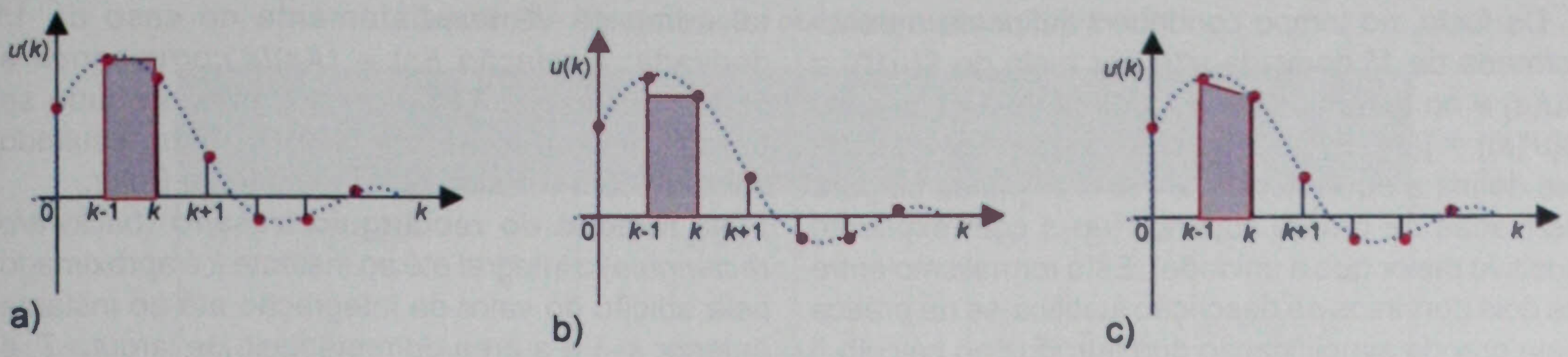


Fig. 4 - Abordagens de discretização por der
a) Método do rectângulo dianteiro.
b) Método do rectângulo traseiro.
c) Método do trapézio.

sua definição permite passar formalmente de $C(s)$ para $C(z)$ com grande simplicidade. E daí resulta o algoritmo de controlo num procedimento muito simples.

Realmente, basta obter a função de transferência $C(z)$ expressa nas potências negativas de z (como se viu atrás) e, com $C(z) = U(z)/E(z)$, transformar para o tempo discreto. Daí resulta

$$u(k) = -a_{n-1}u(k-1) - \ldots - a_1u(k-n+1) - a_0u(k-n) + \\ + b_m e(k-d) + \ldots + b_1e(k-n+1) + b_0u(k-n)$$

expressão fundamental do algoritmo de controlo, em conjunto com $e(k) = r(k) - y(k)$.

DISCRETIZAÇÃO POR DERIVAÇÃO

Os métodos de discretização por derivação distinguem-se pela aproximação que fazem da 1ª derivada em ordem ao tempo no instante actual t_k, derivada definida por

$$u'(t) = \lim_{t \to t_k} \frac{u(t) - u(t_k)}{t - t_k}$$

dando a sua transformação para o domínio s, com todas as condições iniciais nulas, o resultado conhecido $\mathcal{L}\{u'(t\} = sU(s)$.

No **1º método de Euler** esta derivada é aproximada pela diferença relativa ao período de amostragem das amplitudes da variável no instante k+1 (seguinte ao actual) e no instante actual k, ou seja

$$u'(t) \approx \frac{u(k+1) - u(k)}{T_a}$$

cuja transformada em z (para condições iniciais nulas) estabelece

$$\mathcal{L}\{u'(k)\} = \frac{z-1}{T_a} U(z)$$

definindo-se a 2ª derivada

$$u''(k) \approx \frac{u'(k+1) - u'(k)}{T_a}$$

e por substituição

$$u''(k) \approx \frac{u'(k+2) - 2u'(k+1) + u(k)}{T_a^2}$$

donde

$$\mathcal{Z}\{u''(k)\} = \left(\frac{z-1}{T_a}\right)^2 U(z)$$

facilmente generalizável para derivadas de ordem superior. A sua substituição na expressão de $C(z)$ fornece

$$C(z) = \frac{B_m\left(\frac{z-1}{T_a}\right)^m + B_{m-1}\left(\frac{z-1}{T_a}\right)^{m-1} + \ldots + B_1\frac{z-1}{T_a} + B_0}{\left(\frac{z-1}{T_a}\right)^n + A_{n-1}\left(\frac{z-1}{T_a}\right)^{n-1} + \ldots + A_1\frac{z-1}{T_a} + A_0}$$

com $n \geq m$, e, após os desenvolvimentos das potências, vem

$$C(z) = \frac{b_m z^m + B_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}, \qquad n \geq m$$

notando-se então como é que os coeficientes estruturais do controlador digital dependem dos parâmetros do controlador analógico e do período de amostragem.

Daqui conclui-se um resultado muito simplificador: formalmente, obtém-se $C(z)$ através da substituição de s por $(z-1)/T_a$, ou seja, basta fazer

$$s = \frac{z-1}{T_a}$$

De facto, no tempo contínuo t define-se a transformada da 1ª derivada $u'(t)$ por meio de $\mathcal{L}\{u'(t)\} = sU(s)$ e no tempo discreto k obtém-se a expressão $\mathcal{L}\{u'(k)\} = [(z-1)/T_a]U(z)$. Então, formalmente pode-se definir a equivalência $s = (z-1)/T_a$, mesmo para derivadas de ordem superior (ou s com expoente positivo maior que a unidade). Este formalismo entre os dois domínios de descrição justifica-se na prática pela grande simplificação que introduz no cálculo.

No **2º método de Euler**, a 1ª derivada aproxima-se por

$$u'(k) \approx \frac{u(k) - u(k-1)}{T_a}$$

definindo-se pela diferença relativa entre as amplitudes da variável no instante actual k e o anterior $k-1$. Assim, deduz-se

$$\mathcal{L}\{u'(k)\} = \frac{z-1}{T_a z} U(z)$$

e o formalismo entre os domínios s e z estabelece-se pela relação

$$s = \frac{z-1}{T_a z}$$

qualquer que seja a ordem das derivadas (ou o expoente positivo de s).

DESCRETIZAÇÃO POR INTEGRAÇÃO

Os métodos de discretização por integrais distinguem-se entre si pela aproximação que fazem das integrações. No tempo contínuo t o integral simples de uma variável $u(t)$, com condições iniciais nulas, será

$$i(t) = \int_0^t u(t)\, dt$$

dando a sua transformação para o domínio s o resultado $\mathcal{L}\{i(t)\} = U(s)/s$.

No **método do rectângulo dianteiro** (*forward rectangule*) a aproximação do integral no instante actual k faz-se pela adição do valor da integração até ao instante anterior $k-1$ e a área do rectângulo de largura igual ao período de amostragem e com altura dada pelo valor da variável no instante anterior $k-1$, isto é

$$i(k) \approx i(k-1) + T_a u(k-1)$$

donde vem a transformação em z (para condições iniciais nulas)

$$I(z) = \frac{T_a}{z-1} U(z)$$

que facilmente se generaliza a integrações múltiplas. Daí faz-se a dedução de $C(z)$, a partir de $C(s)$ expressa nas potências negativas de s.

O resultado estabelece a relação formal

$$s = \frac{z-1}{T_a}$$

tal como se vê imediatamente no caso da 1ª derivada: à relação $I(s) = U(s)/s$ corresponde a expressão $I(z) = T_a U(s)/(z-1)$ e portanto tudo se passa como se fosse $s = (z-1)/T_a$. Este resultado coincide com o obtido no 1º método de Euler.

No **método do rectângulo traseiro** (*backward rectangule*) o integral até ao instante k é aproximado pela adição do valor da integração até ao instante anterior $k-1$ e a área do rectângulo de largura T_a e com altura igual à amplitude da variável no próprio instante k, ou seja

$$i(k) \approx i(k-1) + T_a u(k)$$

que se transforma em $I(z) = T_a z U(z)/(z-1)$ e portanto a relação formal será

$$s = \frac{z-1}{T_a z}$$

exactamente o resultado do 2º método de Euler.

O **método do trapézio**, também designado **método de Tustin**, adopta a aproximação

$$i(k) \approx i(k-1) + T_a \frac{u(k+1) - u(k)}{2}$$

resultando

$$I(k) = \frac{T_a}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} U(k)$$

e por conseguinte deduz-se o formalismo

$$s = \frac{2}{T_a} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

que traduz a função bilinear.

O raciocínio seguido nestes três casos pode-se exprimir pelo somatório que representa a integração discreta, somando as sucessivas áreas, desde o instante inicial até ao instante actual k, quer de rectângulos ou trapézios, conforme o princípio do método (Quadro 1). Os resultados são, obviamente, os mesmos.

Ainda se observa que o resultado do método de Tustin, relativo à integração aproximada por trapézios, corresponde à aproximação ao primeiro termo do desenvolvimento em série da relação de equivalência dos dois domínios de representação $z = e^{T_a s}$, pois daqui deduz-se

$$s = \frac{1}{T_a} \ln z$$

cuja expansão em série de Taylor dá

$$s = \frac{2}{T_a}\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{(z-1)^3}{3\,(z+1)^3} + \cdots\right]$$

e limitando ao primeiro termo obtém-se a expressão aproximada

$$s \approx \frac{2}{T_a} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

Quadro 1 - Discretização por integração aproximada.

Método do rectângulo dianteiro	Método do rectângulo traseiro	Método do trapézio
$i(k) = T_a \sum_{l=1}^{k} u(l-1)$	$i(k) = T_a \sum_{l=1}^{k} u(l)$	$i(k) = T_a \sum_{l=1}^{k} \frac{u(l) + u(l-1)}{2}$
$i(k-1) = T_a \sum_{l=1}^{k-1} u(l-1)$	$i(k-1) = T_a \sum_{l=1}^{k-1} u(l-1)$	$i(k-1) = T_a \sum_{l=1}^{k-1} u(l-1) \frac{u(l) + u(l-1)}{2}$
$i(k) - i(k-1) = T_a\, u(k-1)$	$i(k) - i(k-1) = T_a\, u(k)$	$i(k) - i(k-1) = \frac{T_a}{2} [u(k) + u(k-1)]$
$I(z) = \frac{T_a}{z-1} U(k)$	$I(z) = \frac{T_a z}{z-1} U(z)$	$I(z) = \frac{T_a}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}$
$s = \frac{z-1}{T_a}$	$s = \frac{z-1}{T_a z}$	$s = \frac{2}{T_a} \cdot \frac{z-1}{z+1}$

exactamente a variável bilinear, relativa à discretização pelo método do trapézio.

ANÁLISE DA ESTABILIDADE

As conclusões formuladas mostram a existência de três métodos de discretização: 1º método de Euler ou do rectângulo dianteiro, 2º método de Euler ou do rectângulo traseiro e método de Tustin ou do trapézio (Quadro 2). Convém analisar o comportamento do sistema discreto, resultante da aplicação de cada um destes métodos, sob o ponto de vista da estabilidade.

Admite-se a condição de partida do sistema analógico ser estável, quer dizer, os seus pólos encontram-se no semi-plano esquerdo de s (ou $\sigma < 0$). Assim, o espaço estável de $s = \sigma + j\omega$ é limitado por $\sigma = 0$, ou seja, $s = j\omega$. Esta fronteira delimita no plano da variável complexa $z = u + jv$ a correspondente área de estabilidade, definida pela transformação $z = e^{j\omega T_a}$. Conforme o método de discretização assim se obtém um espaço z de estabilidade relativo ao semi-plano esquerdo de s.

No **1º método de Euler** deduz-se $z = 1 + T_a s$ e portanto a fronteira da estabilidade corresponde a $z = 1 + j\omega T_a$, que é a área planar à esquerda de $z = 1$ (Fig. 5a). Este resultado não garante que a discretização pelo método do rectângulo dianteiro seja sempre estável, porque podem aparecer pólos no plano z com módulo superior à unidade (fora da circunferência unitária) para frequências entre $\omega = 0$ (com $z = 1$) e $\omega = \omega_N$ (com $z = 1 + j\pi$, pois $\omega_N = \pi / T_a$).

O **2º método de Euler** dá $z = 1/(1 - T_a s)$, que define a fronteira $z = 1/(1 - j\omega T_a)$, expressão equivalente a

$$z = 0{,}5 + 0{,}5 \frac{1 + j\omega T_a}{1 - j\omega T_a}$$

onde se vê que $|z - 0{,}5| = 0{,}5$ é constante (visto ser unitário o módulo da fracção), representando uma circunferência de raio igual a 0,5 e centrada em $z = 0{,}5$ (Fig. 5b). Na verdade, a fracção da expressão

Quadro 2 - Estabilidade dos métodos de discretização.

Método	Equivalência formal		Fronteira de estabilidade
1º método de Euler ou do rectângulo dianteiro	$s = \frac{z-1}{T_a}$	$z = 1 + T_a s$	$z = 1 + \sigma + j\omega T_a$
2º método de Euler ou do rectângulo traseiro	$s = \frac{z-1}{T_a z}$	$z = \frac{1}{1 - T_a s}$	$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + j\omega T_a}{1 - j\omega T_a}$
Método de Tustin ou do trapézio	$s = \frac{2}{T_a} \cdot \frac{z-1}{z+1}$	$z = \frac{2 + T_a s}{2 - T_a s}$	$z = \frac{1 + j\omega \frac{T_a}{2}}{1 - j\omega \frac{T_a}{2}}$

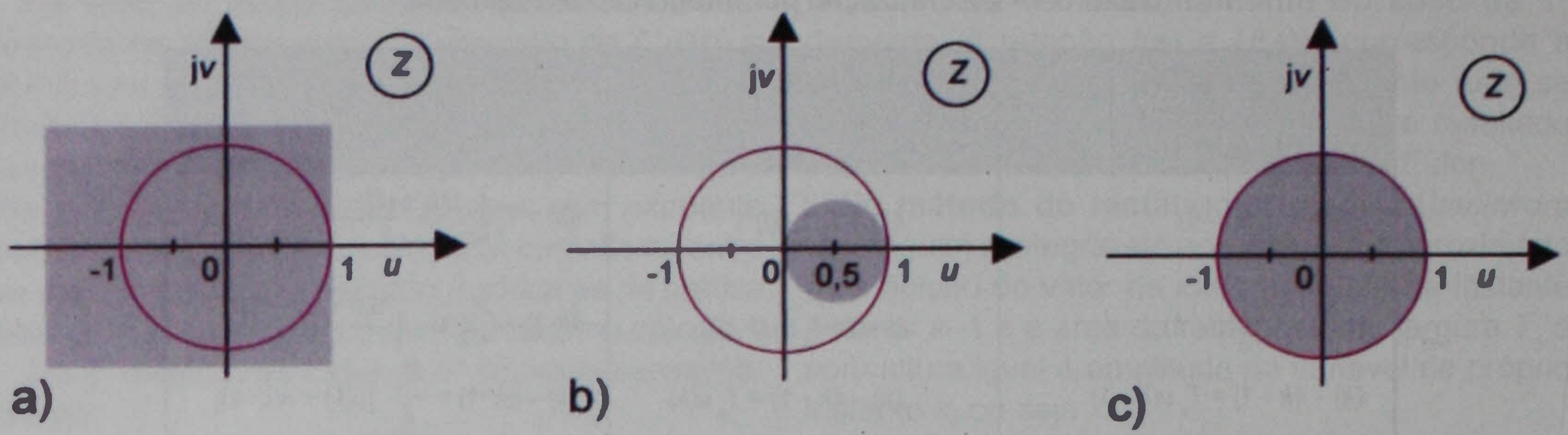


Fig. 5 - Zona de estabilidade por discretização.
a) 1º método de Euler ou método do rectângulo dianteiro.
b) 2º método de Euler ou método do rectângulo traseiro.
c) Método de Tustin ou método do trapézio.

anterior é afectada por 0,5 (impondo um módulo igual a 0,5) e o respectivo argumento $\varphi = 2 \arctan \omega T_a$ faz variar os pólos sobre aquela circunferência limítrofe desde $\omega = 0$ (com $\varphi_0 = 0$) até $\omega = \omega_N$ (com $\varphi_N = 145°$). Os pólos estáveis em *s* fora da fronteira (portanto no semi-plano esquerdo de *s*) determinam sempre pólos estáveis em *z*, porque caem dentro da referida circunferência unitária.

Também o **método de Tustin** garante a estabilidade do sistema discretizado, visto que define a fronteira

$$z = \frac{1 + j\omega \frac{T_a}{2}}{1 - j\omega \frac{T_a}{2}}$$

exactamente a expressão da circunferência unitária (Fig. 5c): qualquer que seja a frequência ω verifica-se $|z| = 1$ com o argumento $\varphi = 2 \arctan (\omega T_a/2)$. Os pólos no semi-plano esquerdo de *s* caem dentro desta circunferência unitária, pelo que um sistema analógico estável também será estável se for discretizado pelo método do trapézio.

INFLUÊNCIAS NA DISCRETIZAÇÃO

Qualquer que seja o método usado, a discretização de um controlador analógico depende da síntese analógica do controlador, da frequência de amostragem e das aproximações introduzidas nos coeficientes das variáveis discretas.

A síntese do controlador, que define a sua estrutura e portanto os coeficientes da função de transferência, baseia-se num modelo analógico, cujos parâmetros são fixados por técnicas analógicas, como a sintonização de Ziegler-Nichols. A discretização não afecta estes parâmetros, sendo os seus valores independentes dos conversores A-D e D-A.

Uma frequência de amostragem bem escolhida origina um comportamento correcto do controlador digital. Teoricamente, convém reduzir o mais possível o período de amostragem. Mas não se deve descer abaixo de um determinado limite, porque a diferença de erros sucessivos, sendo demasiado reduzida, pode eliminar a acção de controlo[1].

A passagem de uma função de transferência analógica *C*(*s*) para outra função de transferência discreta *C*(*z*) efectua-se com várias aproximações no cálculo de derivadas ou de integrais (exceptuando, evidentemente, o controlador proporcional puro). Neste procedimento afectam-se os coeficientes das variáveis discretas, podendo desvalorizar as optimizações analógicas.

De todas estas influências na discretização não se pode garantir que o comportamento da síntese analógica se reproduza na implementação amostrada. As especificações do controlador (erro estacionário, margens de ganho e de fase, sensibilidade, estabilidade, etc), apesar de serem satisfeitas na versão analógica, não se garantem na versão digital.

A discretização de controladores analógicos é uma técnica intuitiva para definir controladores digitais. Todavia, as aproximações introduzidas pelo método de discretização suscitam a procura de outras metodologias, baseadas na teoria de sistemas discretos. Em vez de realizar a síntese dos controladores no domínio *s* (frequência complexa) procede-se à síntese no domínio *z* (variável complexa). Daí a importância do método do lugar de raízes, método de Nyquist ou método de Bode no tempo discreto.

---

[1] H. Duarte-Ramos, «Controladores Digitais no Tempo Discreto», *Electricidade*, n.º 382, Nov. 2000, p. 265-270.