

A. Leão Rodrigues

Departamento de Engenharia Electrotécnica, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa
2825 Monte de Caparica - PORTUGAL

Correntes Transitórias em Dois Enrolamentos com Ligação Magnética Imperfeita

Sumário

O artigo apresenta as expressões gerais das correntes e do fluxo magnético em regime transitório de um transformador de dois enrolamentos com ligação magnética imperfeita, quando se aplica bruscamente uma tensão em degrau a um enrolamento e o outro se encontra em curto-circuito franco. A análise teórica é comprovada pelos resultados experimentais obtidos através do ensaio laboratorial de um transformador monofásico com uma potência aparente de 1 kVA.

Abstract

The paper presents the general transient equations for currents and core magnetic flux in a two-winding transformer with leakage flux, when a step voltage is applied to the primary with the secondary short-circuited. Theoretical analysis are confirmed by experimental results obtained from laboratory tests performed in a 1 kVA single-phase transformer.

1. Introdução

No estudo da máquina eléctrica generalizada em regime transitório é de primordial importância o conhecimento da evolução das correntes induzidas, quer devido ao movimento de rotação, quer por transformação, nos vários enrolamentos com ligação magnética [1]. Para ilustrar este conceito, considera-se um transformador de dois enrolamentos com ligação magnética imperfeita e portanto com dispersão de fluxo. A integração das equações diferenciais lineares que regem o funcionamento do sistema é feita usando o método clássico das transformadas de Laplace [2, 3].

Com este modelo do transformador pretende-se explicar de uma forma simples alguns dos fenómenos que surgem nos enrolamentos colocados no mesmo eixo de uma máquina eléctrica. Os resultados obtidos são importantes para a compreensão do funcionamento da máquina eléctrica generalizada.

2. Equações gerais do transformador

Considerem-se dois enrolamentos em presença com n_1 e n_2 espiras de resistência óhmicas r_1 e r_2 e de coeficientes de indução própria L_{11} e L_{22} , respectivamente. Entre os dois enrolamentos (primário e secundário) existe um coeficiente de indução mútua $L_M = K.(L_{11} L_{22})^{1/2}$, onde K representa o factor de ligação magnética ($K = 0$ ausência de ligação magnética e $K = 1$ ausência de fluxo de dispersão ou ligação magnética perfeita). Ligando ao enrolamento primário uma fonte de tensão variável $u_1(t)$ que forneça ao sistema uma potência $p_1 = u_1.i_1$, o secundário, por indução, fornecerá a uma impedância Z (se $K \neq 0$) uma potência $p_2 = u_2.i_2$. O sistema constitui o clássico transformador (ou conversor de energia eléctrica em energia eléctrica e térmica) com um rendimento $\eta = p_2/p_1$, que, na prática, é muito próximo da unidade. As perdas no transformador $p_1 - p_2$, que se degradam em calor, têm lugar no circuito magnético de ferro (perdas por histerese e perdas por correntes de Foucault) e no circuito eléctrico (perdas no cobre).

Com o sentido das tensões instantâneas u_1 e u_2 e das correntes i_1 e i_2 indicadas na figura 1, de forma a que o fluxo de energia flua da fonte para a carga e os fluxos magnéticos ψ_1 e ψ_2 ligados com cada um dos enrolamentos sejam concordantes (as duas bobinas estão enroladas como se uma fosse a continuação da outra), a aplicação da lei geral de indução electromagnética [4] ao primário e ao secundário conduz, respectivamente, ao seguinte resultado

$$u_1 = r_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} \quad (1)$$

$$0 = r_2 i_2 + \frac{d\psi_2}{dt} + u_2 \quad (2)$$

onde

$$\psi_1 = \psi_{11} + \psi_{21} = L_{11} i_1 + L_M i_2 \quad (3)$$

$$\psi_2 = \psi_{22} + \psi_{12} = L_{22} i_2 + L_M i_1 \quad (4)$$

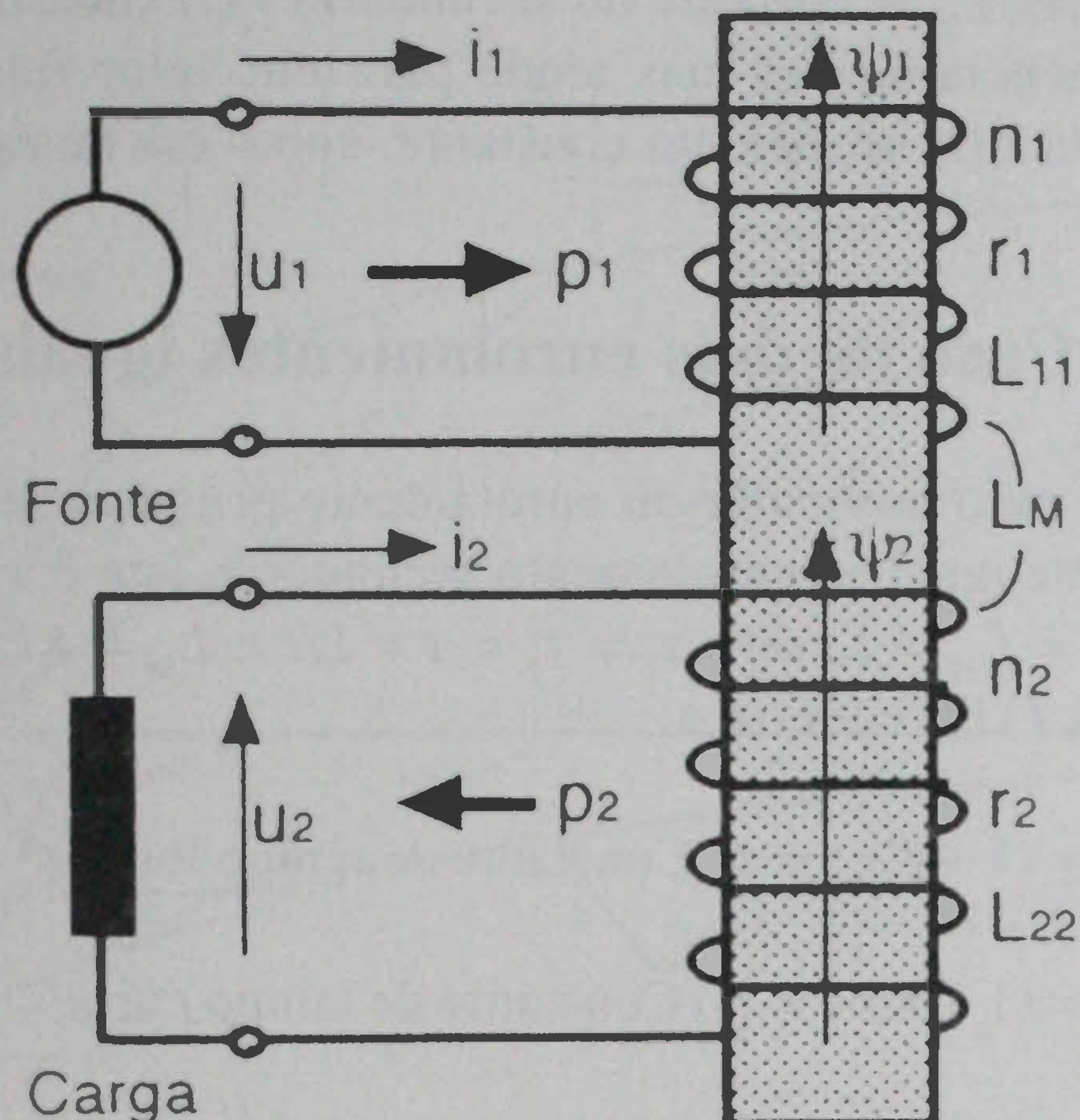


Fig. 1 - Sentido das tensões, correntes, potência e fluxos magnéticos no transformador.

Admitindo que os coeficientes L_{11} , L_{22} e L_M são constantes independentes das correntes nos enrolamentos (circuito magnético linear), a substituição de (3) e (4) em (1) e (2) dá origem às seguintes relações

$$u_1 = r_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_M \frac{di_2}{dt} \quad (5)$$

$$-u_2 = r_2 i_2 + L_{22} \frac{di_2}{dt} + L_M \frac{di_1}{dt} \quad (6)$$

que constituem as equações gerais instantâneas do transformador e são válidas para qualquer forma de onda da tensão $u_1(t)$ aplicada ao primário.

3. Aplicação de uma tensão em degrau

Tem particular interesse o conhecimento da forma de onda da corrente através de cada um dos enrolamentos quando se aplica bruscamente ao primário uma tensão em degrau (tensão contínua de valor $u_1 = U = \text{Const.}$), com o enrolamento secundário em curto-circuito franco ($u_2 = 0$), como ilustra a figura 2.

Aplicando transformadas de Laplace a (5) e a (6) e notando que a transformada de $U = \text{Const}$ é U/s e a de $di(t)$ é $rI(s)$ e ainda que a transformada de $L di(t)/dt$, quando $i(0) = 0$, é $LsI(s)$ vem, respectivamente,

$$U/s = r_1(1 + \tau_1 s)I_1(s) + L_M s I_2(s) \quad (7)$$

$$0 = r_2(1 + \tau_2 s)I_2(s) + L_M s I_1(s) \quad (8)$$

onde $\tau_1 = L_{11}/r_1$ e $\tau_2 = L_{22}/r_2$ são, respectivamente, as constantes de tempo do primário e do secundário.

No domínio da variável s , pode-se escrever (7) e (8) na seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} U/s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1(1 + \tau_1 s) & L_M s \\ L_M s & r_2(1 + \tau_2 s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

cujas soluções, aplicando a regra de Cramer, é

$$I_1(s) = \frac{1 + \tau_2 s}{D} \cdot \frac{U}{r_1} \cdot \frac{1}{s} \quad (9)$$

$$I_2(s) = \frac{L_M / r_2}{D} \cdot \frac{U}{r_1} \quad (10)$$

onde

$$D = 1 + (\tau_1 + \tau_2)s + (\tau_1 \tau_2 - L_M^2 / r_1 r_2)s^2$$

representa o determinante do sistema dividido pelo produto $r_1 r_2$ das resistências ôhmicas dos enrolamentos.

4. Correntes no domínio do tempo

A fim de determinar as correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ no domínio do tempo a partir das transformadas inversas de $I_1(s)$ e $I_2(s)$, respectivamente, convém expandir em frações parciais (9) e (10). Ora as raízes de $D = 0$ são $s_1 = -1/\tau'_1$ e $s_2 = -1/\tau'_2$ onde

$$\tau'_1, \tau'_2 = \frac{2(\tau_1 \tau_2 - L_M^2 / r_1 r_2)}{(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 - \tau_2)^2 + 4L_M^2 / r_1 r_2}} \quad (11)$$

sendo, obviamente, $\tau'_1 > \tau'_2$. Portanto, a equação $D = 0$ pode-se escrever na forma

$$D = (s - s_1)(s - s_2) = (1 + \tau'_1 s)(1 + \tau'_2 s) = 0$$

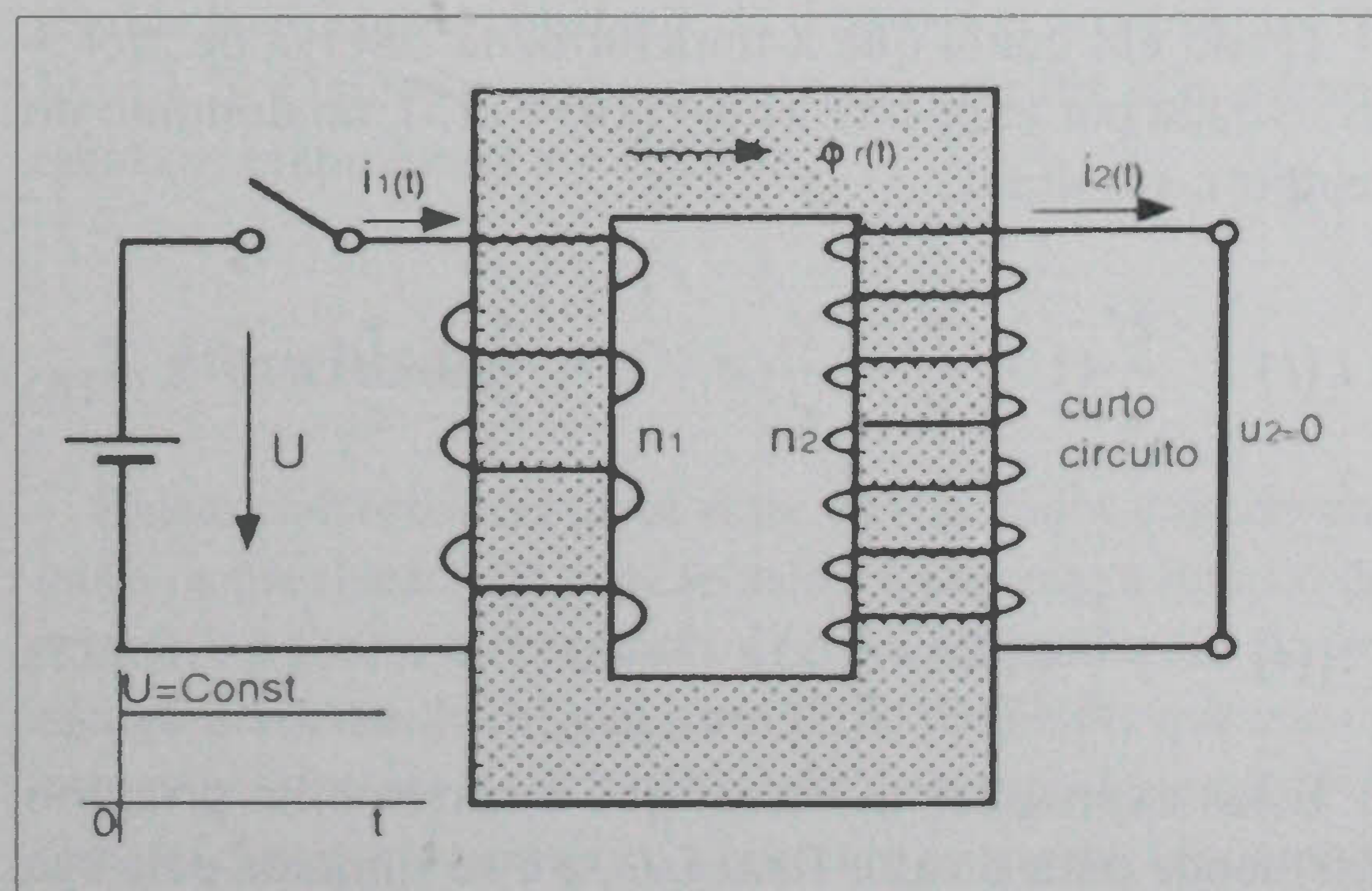


Fig. 2 - Transformador em curto-circuito com a aplicação de uma tensão em degrau.

e a sua substituição respectivamente em (9) e (10) conduz então a

$$I_1(s) = \frac{1 + \tau_2 s}{s(1 + \tau'_1 s)(1 + \tau'_2 s)} \cdot \frac{U}{r_1} =$$

$$= \left(\frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{1 + \tau'_1 s} + \frac{k_3}{1 + \tau'_2 s} \right) \cdot \frac{U}{r_1} \quad (12)$$

$$I_2(s) = -\frac{1}{(1 + \tau'_1 s)(1 + \tau'_2 s)} \cdot \frac{L_M}{r_2} \cdot \frac{U}{r_1} =$$

$$= -\left(\frac{k_4}{1 + \tau'_1 s} + \frac{k_5}{1 + \tau'_2 s} \right) \cdot \frac{L_M}{r_2} \cdot \frac{U}{r_1} \quad (13)$$

onde $k_1, k_2, \dots, k_5$ são constantes a determinar. Assim, por exemplo, a constante k_2 obtem-se multiplicando ambos os membros de (12) pelo seu denominador $1 + \tau'_1 s$, ou seja

$$\frac{1 + \tau_2 s}{s(1 + \tau'_1 s)} = \frac{k_1}{s} (1 + \tau'_1 s) + k_2 + \frac{k_3}{1 + \tau'_2 s} (1 + \tau'_1 s)$$

e substituir nesta expressão s por $-1/\tau'_1$ a fim de eliminar k_1 e k_3 . Logo, resulta

$$k_2 = -\tau'_1 \frac{\tau'_1 - \tau_2}{\tau'_1 - \tau'_2}$$

De modo semelhante, podem ser calculadas as restantes constantes. Consequentemente, (12) e (13) ficam

$$I_1(s) = \frac{U}{r_1} \left(\frac{1}{s} - \frac{\tau'_1 - \tau_2}{\tau'_1 - \tau'_2} \cdot \frac{\tau'_1}{1 + \tau'_1 s} - \frac{\tau'_2 - \tau_2}{\tau'_2 - \tau'_1} \cdot \frac{\tau'_2}{1 + \tau'_2 s} \right) \quad (14)$$

$$I_2(s) = -\frac{U}{r_1} \left(\frac{1}{\tau'_1 - \tau'_2} \cdot \frac{\tau'_1}{1 + \tau'_1 s} + \frac{1}{\tau'_2 - \tau'_1} \cdot \frac{\tau'_2}{1 + \tau'_2 s} \right) \frac{L_M}{r_2} \quad (15)$$

Tendo em conta que a transformada inversa de $\tau/(1 + \tau s)$ é dada por $\exp(-t/\tau)$, então (14) e (15), no domínio do tempo t , resultam

$$i_1(t) = \frac{U}{r_1} \left(1 - \frac{\tau'_1 - \tau_2}{\tau'_1 - \tau'_2} e^{-\frac{t}{\tau'_1}} - \frac{\tau'_2 - \tau_2}{\tau'_2 - \tau'_1} e^{-\frac{t}{\tau'_2}} \right) \quad (16)$$

$$i_2(t) = -\frac{U}{r_1} \left(\frac{L_M/r_2}{\tau'_1 - \tau'_2} \right) \cdot (e^{-\frac{t}{\tau'_1}} - e^{-\frac{t}{\tau'_2}}) \quad (17)$$

Estas expressões mostram que a corrente no primário $i_1(t)$ tende para o valor final U/r_1 e é só limitada pela sua resistência óhmica r_1 , variando exponencialmente com uma constante de tempo longa τ'_1 e uma constante de tem-

po curta τ'_2 . A corrente no secundário $i_2(t)$ varia também exponencialmente, mas tende para um valor final nulo quando $i_1(t)$ se mantém constante, como era de esperar.

5. Caso de dois enrolamentos iguais

No caso particular do enrolamento primário ser exactamente igual ao enrolamento secundário, isto é, $r_1 = r_2 = r$, $L_{11} = L_{22} = L$, será $\tau_1 = \tau_2 = \tau = L/r$ e $L_M = KL$. Deste modo, (11) reduz-se a

$$\tau'_1 = (1 + K) \tau = \tau_l \text{ (Constante de tempo longa)} \quad (18)$$

$$\tau'_2 = (1 + K) \tau = \tau_c \text{ (Constante de tempo curta)} \quad (19)$$

A substituição de (18) e (19) em (16) e (17) conduz imediatamente às seguintes soluções particulares

$$i_1(t) = I \left[1 - \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{t}{\tau_l}} + e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right) \right] \quad (20)$$

$$i_2(t) = -\frac{1}{2} \left(e^{-\frac{t}{\tau_l}} - e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right) \quad (21)$$

onde $I = U/r$ é o valor final da corrente no primário.

Admitindo que o circuito magnético é linear (ausência de saturação), o fluxo resultante instantâneo $\phi_r(t)$ através do núcleo do transformador é, segundo a lei de Hopkinson, directamente proporcional à f.m.m., isto é

$$n_1 i_1(t) + n_2 i_2(t) = \frac{1}{P_p} \phi_r(t)$$

onde P_p é a permeância do núcleo do transformador. Sendo, por hipótese, $n_1 = n_2 = n$, vem

$$\phi_r(t) = n P_p [i_1(t) + i_2(t)] \quad (22)$$

e substituindo (20) e (21) em (22), resulta

$$\phi_r(t) = \phi_{perm} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_l}}) \quad (23)$$

onde $\phi_{perm} = n I P_p$ é o fluxo no ferro em regime permanente devido à corrente final I do primário.

Segundo (23), o fluxo resultante no ferro devido às duas correntes tende para o fluxo permanente ϕ_{perm} com uma taxa de variação dada pela constante de tempo longa, isto é, $\tau_l = (1 + K) \tau$. Quer isto dizer que quanto melhor for a ligação magnética entre os dois enrolamentos ($K \rightarrow 1$), mais lentamente se atinge ϕ_{perm} e, portanto, a corrente i_2 do secundário circulará durante mais tempo. Na figura 3 está representada a evolução de $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $\phi_r(t)$ para o caso particular de dois enrolamentos iguais

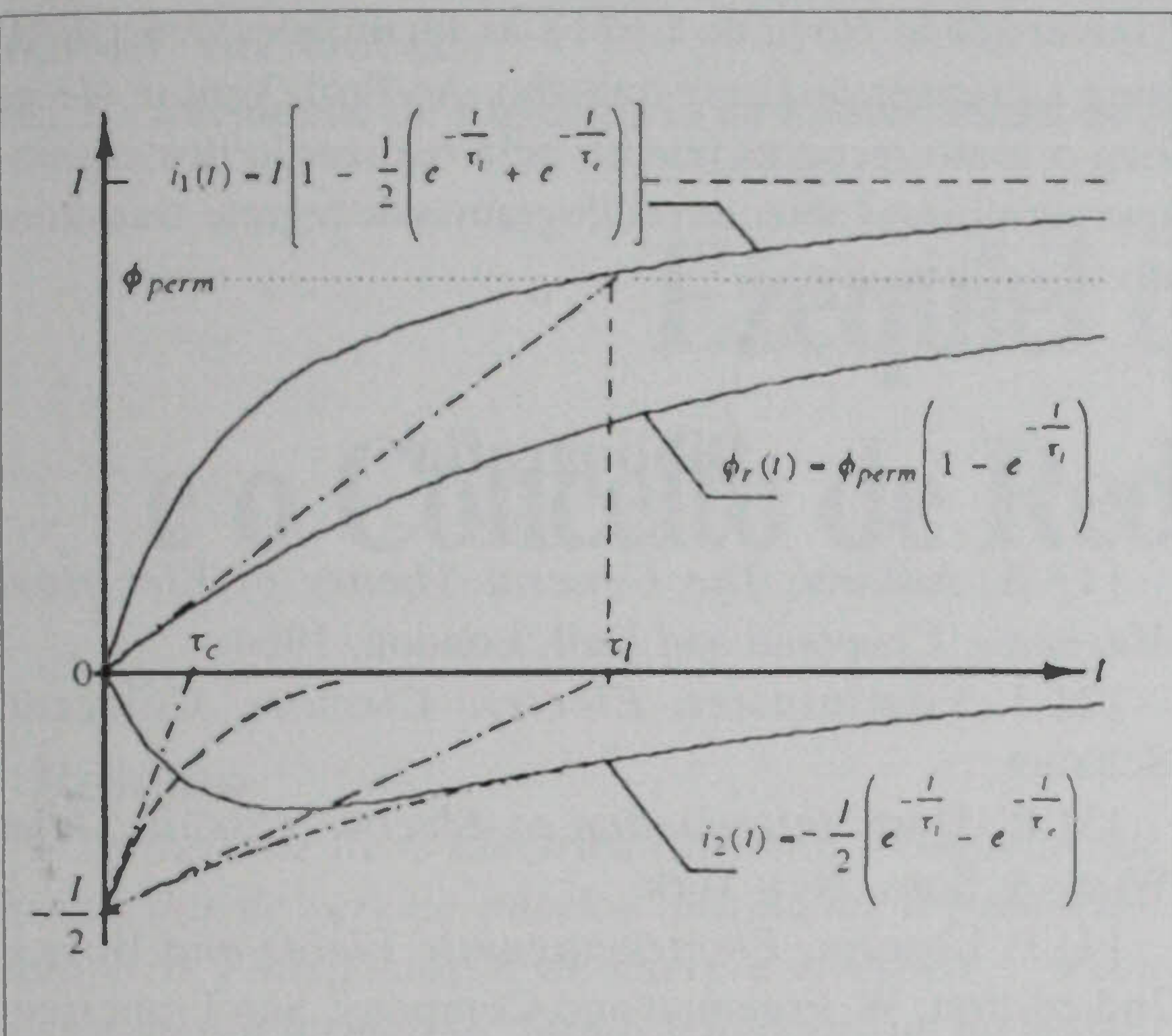


Fig. 3 - Evolução das correntes e do fluxo para dois enrolamentos iguais.

em presença e com uma ligação magnética $K = 0,7$ (isto é, $\tau_i = 5,66\tau_c$).

6. Resultados experimentais

A fim de confirmar a teoria exposta, ensaiou-se um transformador com uma potência aparente $S = 1$ kVA, de enrolamentos iguais, cada um com 300 espiras, tendo-se previamente medido uma resistência óhmica de $r = 0,5 \Omega$, um coeficiente de auto-indução total $L = 600$ mH e um coeficiente de indução mútua $L_M = l = 540$ mH, onde $l = n^2 P_p$ representa o coeficiente de auto-indução principal. O factor de ligação magnética resulta portanto em $K = L_M/L = 0,9$.

Com estes parâmetros, as constantes de tempo do transformador tomam os valores $\tau = L/r = 1,2$ s, $\tau_i = (1 + K)\tau = 2,28$ s e $\tau_c = (1 - K)\tau = 0,06$ s, com uma relação $\tau_i/\tau_c = 38$.

Segundo o esquema indicado na figura 4, fez-se um ensaio com o secundário em curto-circuito, aplicando brus-

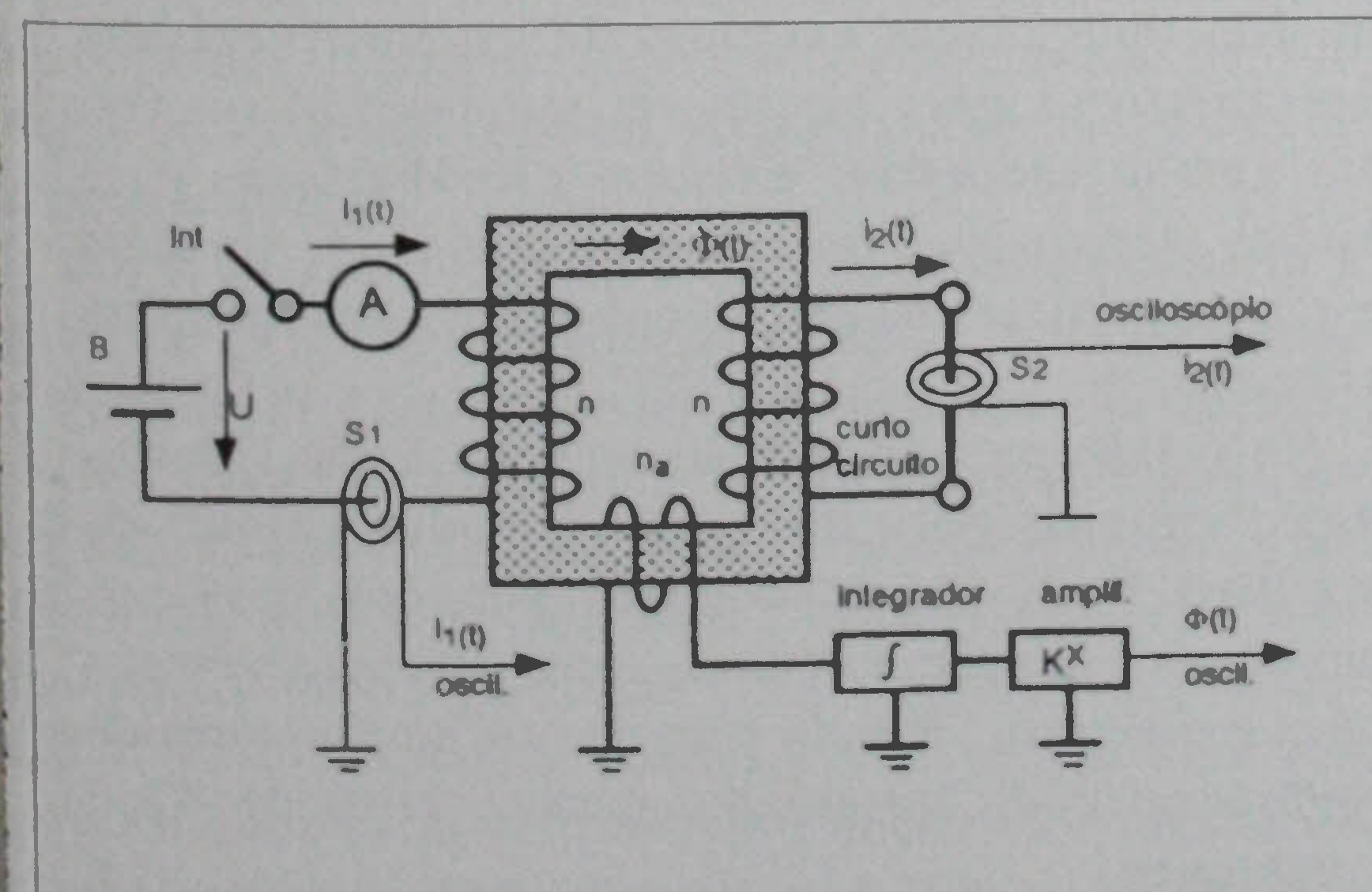


Fig. 4 - Esquema de montagem de ensaio.

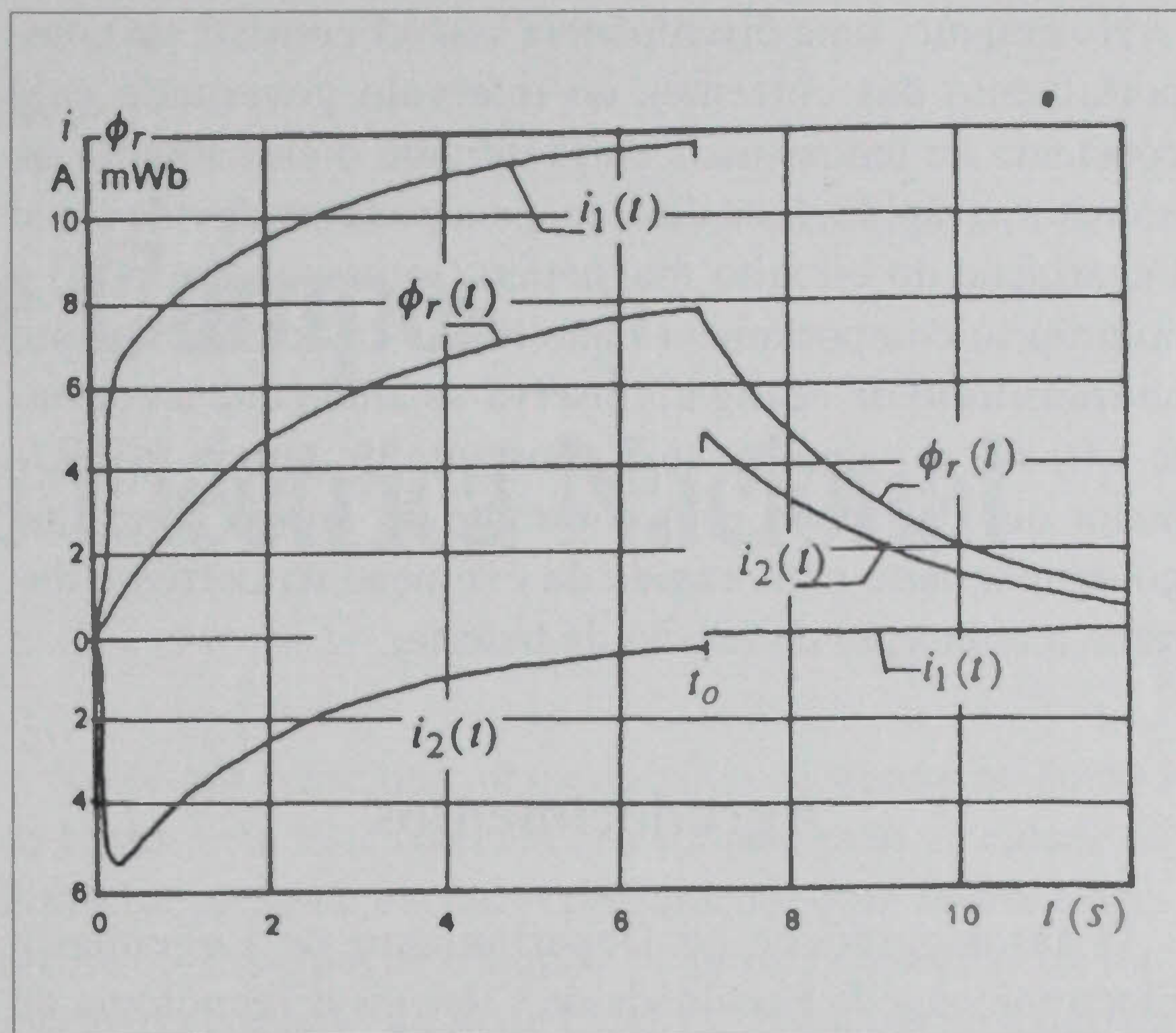


Fig. 5 - Oscilogramas do regime transitório.

camente ao primário uma tensão em degrau de valor $U = 6$ V a partir de uma bateria B. Com o auxílio de um oscilógrafo de raios catódicos com três canais oscilografou-se simultaneamente, por intermédio das sondas S1 e S2, a evolução das correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ e do fluxo magnético no núcleo $\phi_r(t)$. Para oscilografar o fluxo magnético usou-se um enrolamento auxiliar de $n_a = 50$ espiras. A f.e.m. $e(t) = -n_a d\phi_r/dt$ induzida no enrolamento auxiliar foi aplicada a um integrador cuja saída, depois de amplificada no amplificador de ganho K^X , é uma imagem do fluxo no ferro. A saída do amplificador é portanto $n_a K^X \phi_r(t)$ e este sinal foi finalmente oscilografado.

Ligando o interruptor **Int**, provocou-se o início da corrente no primário $i_1(t)$ e simultaneamente, por indução, ocorreu a circulação da corrente de curto-circuito no secundário $i_2(t)$. Ao fim de $t_0 = 7$ s desligou-se o interruptor, tendo-se registado o regime transitório devido à desligação do transformador. O resultado está ilustrado na figura 5.

O valor do coeficiente de auto-indução de dispersão $\lambda = L - l = 60$ mH, relativamente pequeno comparado com o coeficiente de auto-indução total $L = 600$ mH, torna suportável a interrupção de i_1 sem efeitos dramáticos, deixando o fluxo principal suportado na corrente i_2 , a qual decai em regime livre com a constante de tempo do enrolamento $\tau = L/r = 1,2$ s. O fluxo magnético decai, no entanto, com a constante de tempo longa $\tau_i = 2,28$ s.

7. Conclusões

Existe concordância geral entre os resultados experimentais e os previstos pela análise teórica. Durante a ligação do primário à fonte, as correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ produzem fluxos antagónicos, dando origem a um fluxo resultante que cresce exponencialmente com a constante de tempo longa τ_i . Porém, ao desligar o primário, a corrente i_2 inverte, obviamente, o seu sentido de circulação, devido ao decaimento do fluxo magnético.

No entanto, uma discrepância visível consiste no comportamento das correntes no intervalo governado pela constante de tempo mais curta durante o escoamento do transitório rápido. Esta discrepância pode ser devida à não linearidade do circuito magnético (saturação do ferro) e ao próprio comportamento não linear da bateria. Quanto ao transitório de desligar, observa-se ainda que a corrente $i_2(t)$ decai segundo uma constante de tempo $\tau = L/r$ maior que τ_c , sendo esta constante de tempo curta que governa a parte mais rápida da evolução da corrente durante a aplicação da tensão da bateria.

Agradecimentos

O autor agradece ao Departamento de Engenharia Electrotécnica da Faculdade de Ciências e Tecnologia da

Universidade Nova de Lisboa as facilidades concedidas para a preparação deste trabalho. Ao Prof. Ventim Neves fica o grato reconhecimento pela realização dos ensaios que permitiram obter os oscilogramas de regime transitório do transformador.

Bibliografia

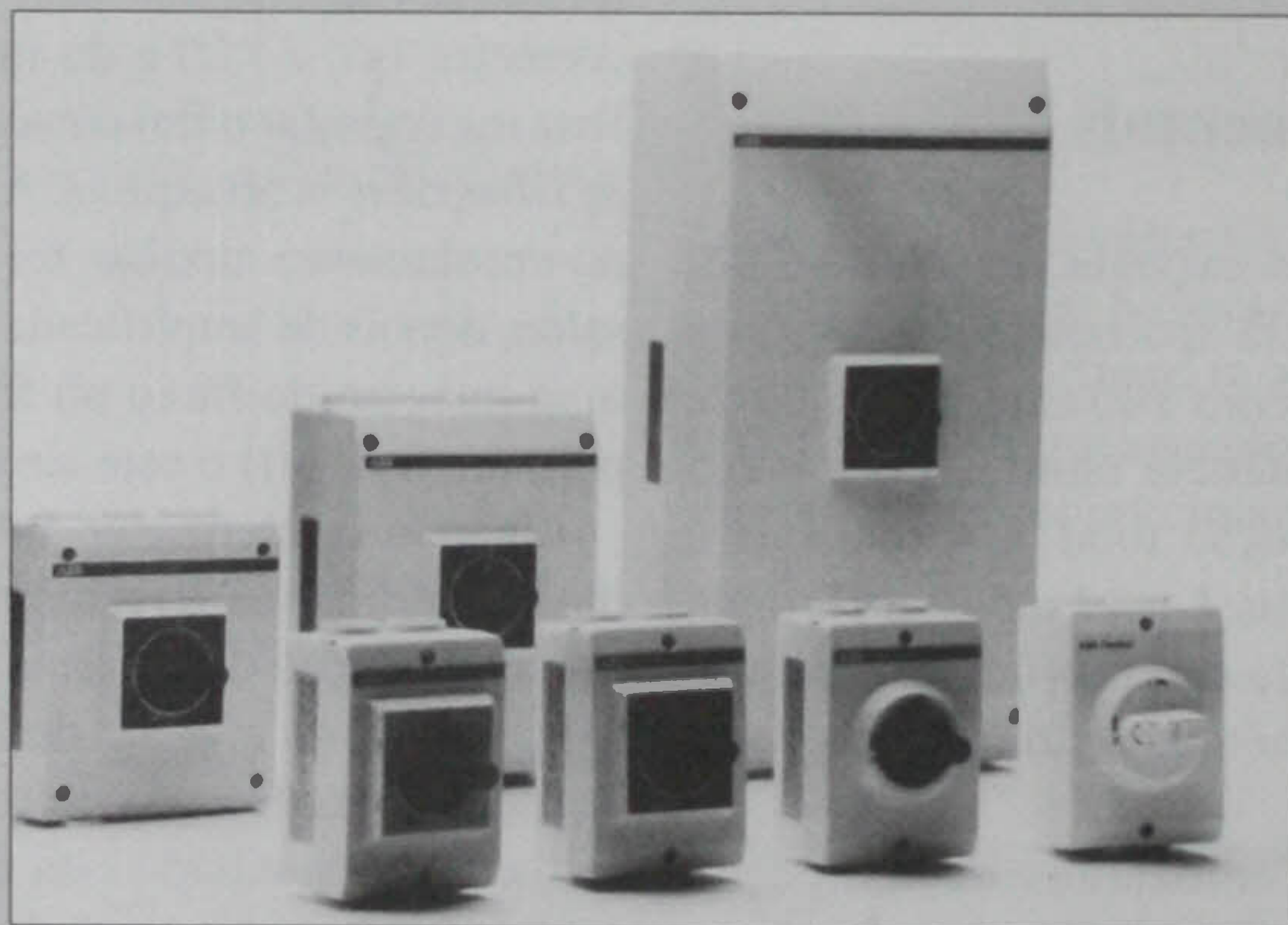
- [1] B. Adkins, *The General Theory of Electrical Machines*, Chapman and Hall, London, 1964.
- [2] J. Edmininster, *Electric Circuits*, Colecção Schaum.
- [3] R. Dorf, *Introduction to Electric Circuits*, John Wiley & Sons, New York.
- [4] P. Lorrain, *Electromagnetic Fields and Waves*, 2nd edition, W. Freeman and Company, San Francisco.

Novos Interruptores de Segurança

A nova gama de interruptores de segurança da ABB ganhou o prestigiado prémio de design na Feira de Hannover de 1997. À série de interruptores de segurança, designada SafeLine, foi atribuído o muito respeitado iF (Industrie Forum Design Hannover) Industry Design Award, que consagra produtos industriais reconhecidos pelas suas características ecológicas e de segurança para o utilizador.

Durante o desenvolvimento dos interruptores, uma das preocupações principais foi estudar o efeito que os materiais e processos de fabricação empregues teriam sobre o ambiente. O desenho do interruptor garante que nenhum destes factores causará poluição.

Apropriados para uso doméstico e para utilização industrial, os interruptores de segurança SafeLine estão providos de um novo invólucro de plástico para intensidades de corrente de 16 A a 90 A e foram testados segundo a norma IEC947-3. O invólucro é feito de plástico à prova de calor de choques mecânicos, de inflamação difícil e auto-extinguível, conforme a norma UL 50 relativa a Invólucros para Equipamento Eléctrico. O próprio invólucro está em conformidade com



Os novos interruptores de segurança SafeLine, com invólucro, estão disponíveis para intensidades de corrente de 16 A a 90 A e em vários modelos e cores que permitem obter harmonia com o meio envolvente.

a norma IEC 529 relativa a Graus de Protecção dos Invólucros e tem o grau de protecção IP 65.

Uma importante característica adicional reside na segurança operacional. A alavanca de comando pode ser fechada na posição "desligado" com três cadeados e a tampa não pode ser removida quando o interruptor está na posição "ligado". As placas de cobertura também podem ser seladas.

A facilidade de instalação foi outra preocupação importante durante os trabalhos de projecto. Nas duas placas extremas do invólucro existem pré-aberturas para buçins de tamanho M ou Og. Na versão industrial existem pré-aberturas para buçins, separadas para cabos de comando. Também estão disponíveis placas de cobertura dos topos sem abertura.

Na versão para instalação doméstica são fornecidos terminais para dois cabos, como acessórios standard. No invólucro há espaço para dois contactos auxiliares e existem terminais separados para a fase, a terra e o neutro, fazendo com que os interruptores de segurança sejam apropriados para sistemas de 4 e 5 condutores.