Dedução da Fórmula de Planck a Partir das Equações Diferenciais de Friedmann

Luís V. Carvalho
Engenheiro Técnico Civil
Hidrotécnica Portuguesa, Lisboa

Mostra-se neste artigo como, impondo a equação de estado de energia nas equações diferenciais de Friedmann, se pode obter a fórmula de Planck. Além disso, apresenta-se uma interpretação da fórmula de Planck em termos de fluxo de energia.

Consideremos as equações diferenciais de Friedmann [1]:

$$3R''/R = 1/2\kappa(\rho + 3p) \qquad (1)$$

$$R''R + 2R'^2 + 2k = -1/2\kappa(\rho - p)R^2 \qquad (2)$$

em que

R - factor de escala (que pode representar o raio de curvatura do espaço

$R' = \mathrm{d}R/\mathrm{d}t$

$R'' = \mathrm{d}^2R/\mathrm{d}t^2$

$\kappa = -8\pi G$ (admitindo a velocidade da luz $c = 1$)

G = constante gravitacional

ρ = densidade de massa-energia

p = pressão

$k = +1, 0, -1$ conforme se admitir, respectivamente, uma curvatura positiva, uma curvatura nula ou uma curvatura negativa

Se assumirmos $k = 1$ e impusermos uma equação de estado energia [2], será

$$p = \rho/3 \qquad (3)$$

Combinado (3) com (1) e (2), obtém-se

$$R''R + R'^2 + 1 = 0 \qquad (4)$$

que é a equação diferencial de uma circunferência para o centro no eixo dos xx.

Com efeito, se na citada circunferência igualarmos o raio de curvatura ao comprimento da normal obtemos

$$(1 + R'^2)^{3/2} / R'' = -R\,(1 + R'^2)^{1/2} \qquad (5)$$

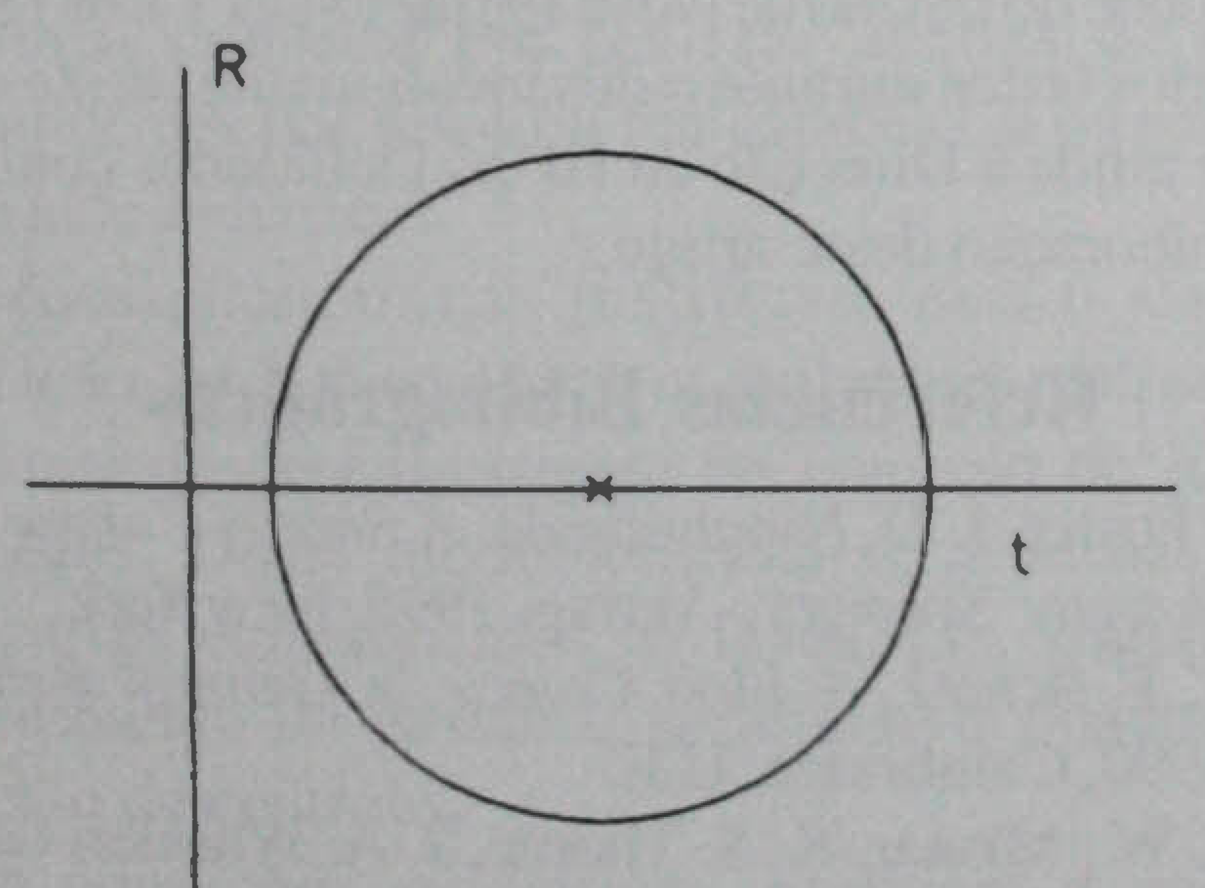

Fig. 1 - Representação da função $R^2 + (t + c_1)^2 = c_2^2$ onde c_1 e c_2 são constantes.

Simplificando a expressão anterior obtemos a equação diferencial (4).

A solução de (4) é então a equação de uma circunferência (Fig. 1), representada pela função

$$R^2 + (t + c_1)^2 = c_2^2 \qquad (6)$$

em que c_1 e c_2 são constantes.

A função (6) representada na figura 1 é bi-unívoca, o que não é claro. Contudo, como se verá adiante, a indeterminação é devida ao sistema particular de coordenadas que adoptámos.

Como a solução de (4) é uma circunferência em coordenadas cartesianas, podemos representar a circunferência na forma complexa (Fig. 2)

$$R = ae^{j\omega t} = a\,(\cos \omega t + \mathrm{j} \sin \omega t) \qquad (7)$$

em que ω é a frequência angular do vector rotativo $\boldsymbol{A}$.

Diferenciemos (7) duas vezes em relação a t

$$R' = \mathrm{j}\omega a e^{j\omega t} \qquad (8)$$

$$R'' = -\omega^2 a e^{j\omega t} \qquad (9)$$

Se admitirmos que a extremidade do vector $\boldsymbol{A}$ gira com a velocidade tangencial 1 (velocidade da luz), então será

$$v_t = a\omega = 1 \qquad (10)$$

e as expressões (8) e (9) reduzem-se a

$$R' = \mathrm{j}e^{j\omega t} \qquad (11)$$

$$R'' = -\omega e^{j\omega t} \qquad (12)$$

Introduzindo (7), (11) e (12) em (4) obtemos

$$-a\omega e^{2j\omega t} - e^{2j\omega t} + 1 = 0 \qquad (13)$$

que pode ser escrita na forma

$$-ae^{2j\omega t} - (e^{2j\omega t} + 1)/\omega = 0 \qquad (14)$$

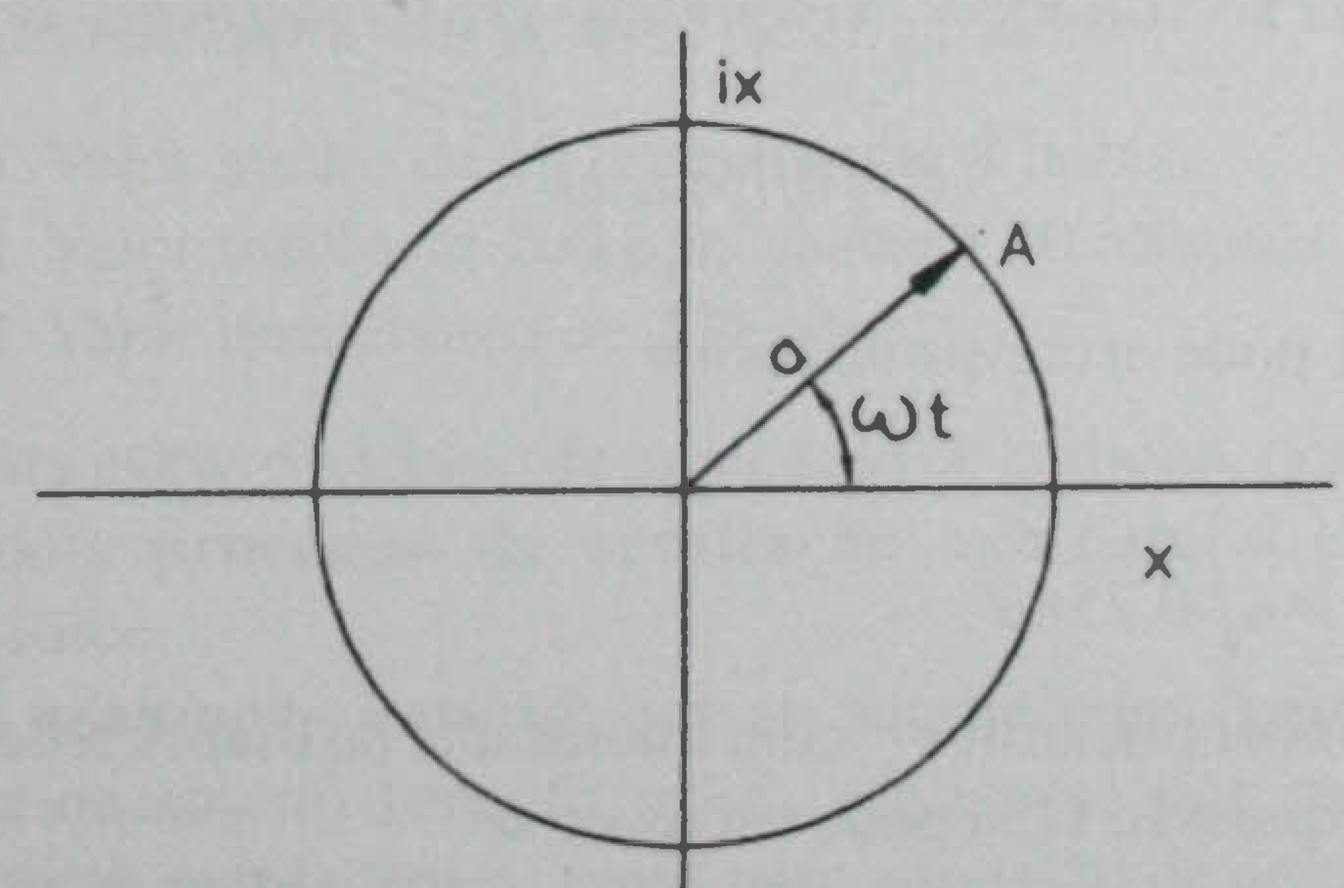

Fig. 2 - Caracterização de uma circunferência na forma complexa.

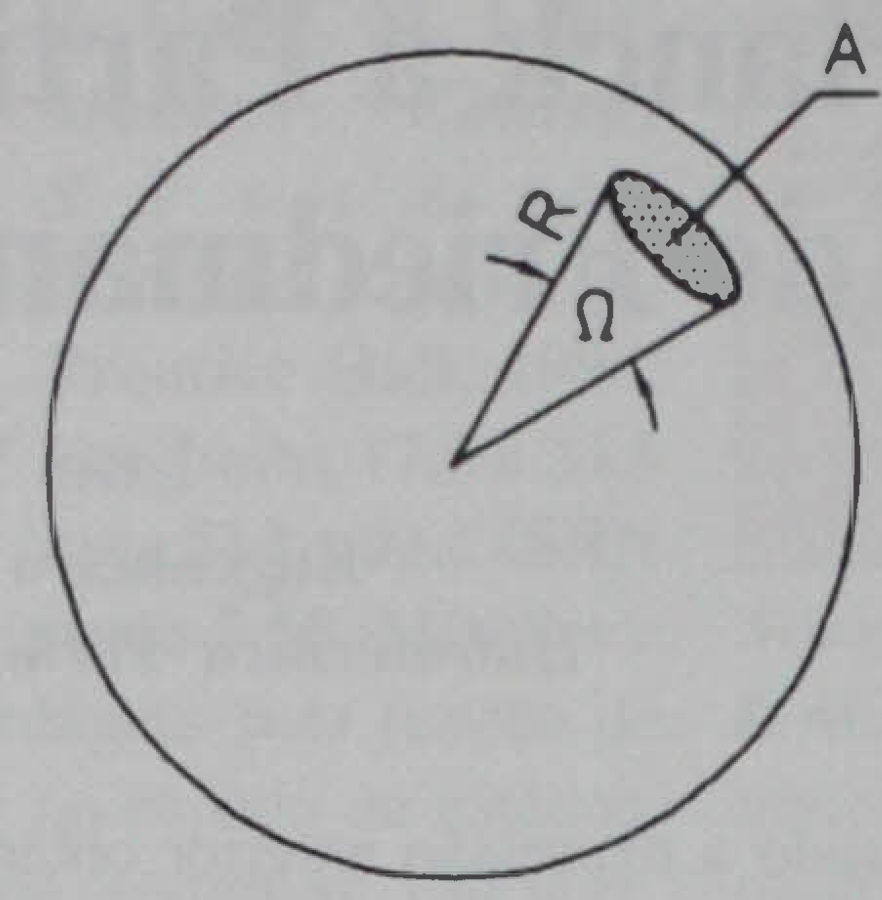

Fig. 3 - Representação de um ângulo sólido.

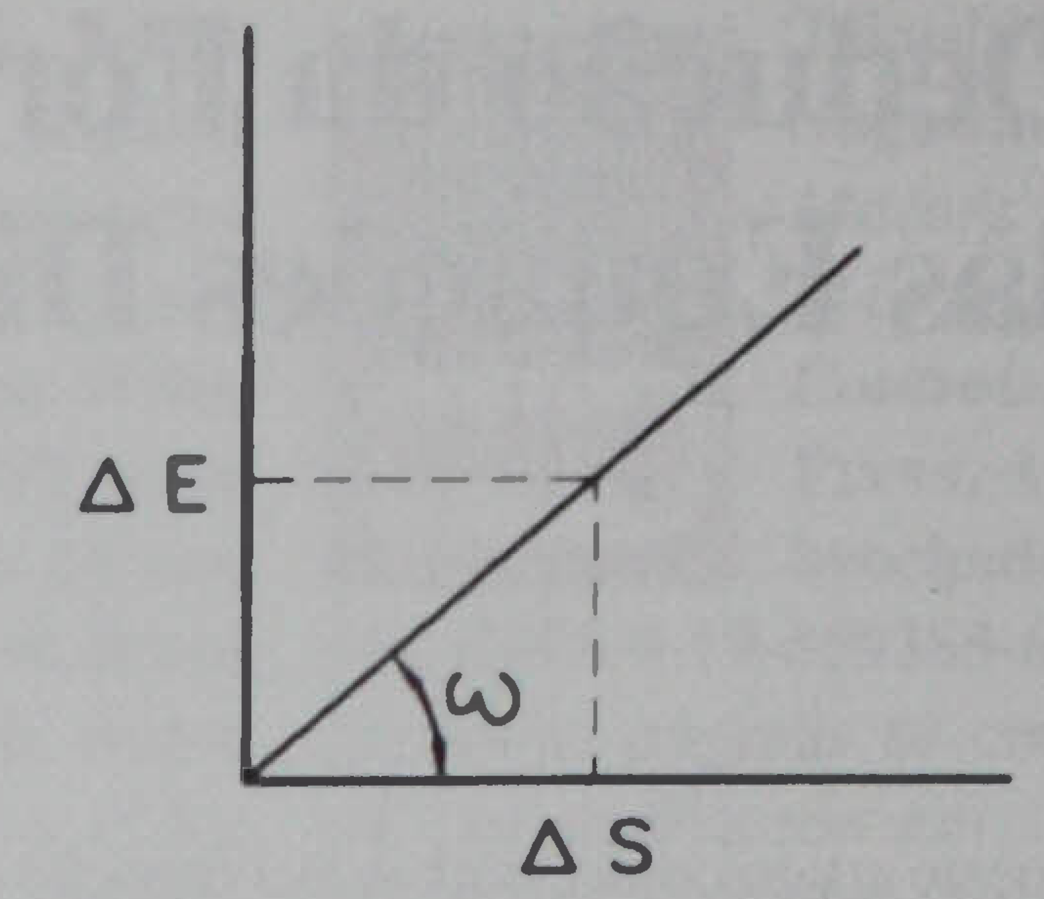

Fig. 4 - Representação da relação entre ΔE e ΔS.

Como, por (10), ω é $\longrightarrow \infty$ quando $a \longrightarrow 0$, a equação (14) é satisfeita para $a = 0$.

Antes de continuar a exposição, convém esclarecer dois pontos:

1) O valor $a = 0$ é uma consequência de se impor a velocidade da luz à extremidade do vector $\boldsymbol{A}$. Com efeito, o tempo próprio de uma partícula que se desloca à velocidade da luz é zero, qualquer que seja o comprimento da trajectória. Assim, o tempo necessário para a partícula percorrer uma circunferência de qualquer raio será sempre zero, o que implica $a = 0$.
2) A solução $a = 0$ não implica que a frequência angular ω só possua o valor de infinito. Na realidade, como se verá adiante, o valor da frequência angular ω é finito.

Analisemos agora a solução de (1) para a equação de estado de energia. Introduzindo (3) em (1) obtem-se

$$3R'' = \kappa \rho R \qquad (15)$$

Como (7) é solução de (4) e representa a trajectória de um raio de luz num espaço curvo fechado com densidade uniforme, terá de ser também solução de (15), onde a densidade ρ deve ser considerada constante. Introduzindo (7) e (12) em (15) e atendendo ao valor de κ, será

$$\omega = \frac{8\pi G \rho a}{3} \qquad (16)$$

Como o volume de um espaço curvo fechado, com o raio de curvatura a é [3]

$$V = 2\pi^2 a^3 \qquad (17)$$

sendo $G = 1$ (em unidades geometrizadas) e E a energia contida no volume V, a expressão (16) transforma-se em

$$E = 0{,}75\pi a^2 \omega \qquad (18)$$

que se pode escrever na forma

$$E = r^2 \omega \qquad (19)$$

com $r = \sqrt{0{,}75\pi a}$

Se indentificarmos r^2 com a constante de Planck reduzida $\hbar$, a expressão (19) pode escrever-se

$$E = \hbar \omega \qquad (20)$$

que é, como se sabe, a fórmula de Planck.

Comparando (20) com a expressão

$$A = R^2 \Omega \qquad (2$$

que relaciona a área A (Fig. 3) na superfície de uma esfe com o raio R dessa esfera e com o ângulo sólido Ω, verificam que há uma correspondência entre os símbolos das expressõ (20) e (21), pois nos segundos membros destas expressões o primeiros símbolos representam áreas e os segund representam ângulos.

Escrevamos (19) na forma

$$\frac{\Delta E}{\Delta S} = \omega \qquad (2$$

em que $\Delta E = E$ e $\Delta S = r^2$.

Como $a = 0$ é solução de (4) e $r \propto a$, fazendo $r \longrightarrow 0$, resulta (Fig. 4)

$$\Delta S \longrightarrow 0,\ \Delta E \longrightarrow 0$$

pelo que podemos escrever

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta S} = \omega \qquad (2$$

o que prova a afirmação, feita anteriormente, de que ω tem valor finito quando $a \longrightarrow 0$.

A expressão (23) permite interpretar a fórmula de Planc como o fluxo de energia em função de $\omega = 2\pi\upsilon$, em que representa o número de linhas de fluxo. Este facto pode s demonstrado por um teorema devido a Gauss [4], mas nã apresentamos aqui a demonstração por razões de espaço.

Agradecimentos

O autor agradece ao Prof. Jubilado J. Nightingale, d Universidade do Estado de Nova Iorque (SUNY), os fecund comentários feitos durante o desenvolvimento deste estud agradece ainda à Direcção da HP as facilidades concedida para a elaboração deste artigo.

Referências Bibliográficas

[1]. J. Foster, J. D. Ninghtingale, *A Shourt Course in Ge neral Relativity*, Springer - Verlag, 1995, New York.

[2]. B. F. Schutz, *A First Course in General Relativit* C.U.P., 1990, Cambridge, U.K.

[3]. C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravita tion*, W. H. Freeman, 1973, New York.

[4]. R. Courant, *Differential and Integral Calculus*, Vol. 2 Blackie and Son, 1951, London.