JUSTIFICAÇÃO ANALÍTICA, PELA TRANSFORMAÇÃO DE PARK, DA TEORIA DAS DUAS REACÇÕES

FRANKLIN GUERRA PEREIRA
Engenheiro Electrotécnico (U. P.)
CHEFE DE SERVIÇO DA EMPRESA FABRIL DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS

O diagrama vectorial das máquinas síncronas de polos salientes é habitualmente estabelecido a partir da teoria das duas reacções, concebida pelo génio inventivo de BLONDEL. *Nessa teoria, as tensões e correntes efectivamente aplicadas aos vários enrolamentos da máquina são substituídas por tensões e correntes fictícias, existentes em enrolamentos imaginários tão hàbilmente escolhidos que suas indutâncias próprias e mútuas, ao contrário das indutâncias dos enrolamentos reais, aparecem independentes da posição do rotor e podem ser determinadas por meio de ensaios muito simples.*

Com o presente estudo proponho-me apresentar uma justificação rigorosa das concepções de BLONDEL, *mostrando como a teoria das duas reacções surge naturalmente da transformação de Park aplicada às correntes dos enrolamentos reais da máquina.*

Se bem que tenha esta matéria sido objecto de abundante literatura, creio ser a primeira vez que se analisa por intermédio do cálculo matricial, cujos princípios elementares suponho conhecidos dos leitores.

A parte não inédita deste estudo baseia-se largamente em alguns capítulos do livro Power System Stability *(3.º volume), de* EDWARD KIMBARK.

EQUAÇÕES GERAIS DA MÁQUINA SÍNCRONA

Delimitemos em primeiro lugar as características da máquina síncrona de polos salientes objecto do nosso estudo. Será indiferentemente um motor ou um gerador, trifásico, desprovido de enrolamento amortecedor, trabalhando sem saturação, com perdas nulas no ferro, bipolar.

Nele se distinguem quatro circuitos indutivamente acopulados: os enrolamentos das três fases estatóricas, percorridos por corrente alterna, e o enrolamento de excitação onde circula corrente contínua. Nos terminais dos três primeiros existem tensões que designaremos pelos símbolos v_a, v_b, v_c e estabelecem-se correntes simbolizadas por i^a, i^b, i^c. A tensão e a corrente do enrolamento polar ficam representadas por v_e, i^e. Designaremos ainda por φ_a, φ_b, φ_c, φ_e os fluxos totais de cada circuito, por r a resistência do enrolamento de cada fase, por r_e a resistência do enrolamento de excitação (Fig. 1).

A lei de Ohm conduz ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} v_a = \dfrac{d\varphi_a}{dt} \pm ri^a \\[2ex] v_b = \dfrac{d\varphi_b}{dt} \pm ri^b \\[2ex] v_c = \dfrac{d\varphi_c}{dt} \pm ri^c \\[2ex] v_e = \dfrac{d\varphi_e}{dt} + r_e \end{cases}$$

O duplo sinal ($\pm$) abrange as duas possibilidades em causa: funcionamento como motor ou como gerador. Para simplificar as equações é cómodo tomar o sinal $+$, vamos portanto admitir que a máquina síncrona trabalha como motor. A extensão dos resultados para o caso do funcionamento como gerador efectua-se, como mostraremos, sem qualquer dificuldade.

Cada um dos considerados quatro circuitos se encontra acopulado com todos os outros. Por exemplo a corrente i^b da fase B produz na fase A o fluxo $l_{ab}i^b$, com l_{ab} designando o coeficiente de indução mútua entre os enrolamentos das duas fases. De um modo geral, o fluxo produzido no circuito m pela corrente do circuito n vale $l_{mn}i^n$: se $m = n$ trata-se de induções próprias, se $m \neq n$ trata-se de induções mútuas.

Como a saturação é por hipótese inexistente, os coeficientes de indução, quer mútua quer própria, são constantes, isto é, independentes do valor instantâneo das correntes.

Adicionando os fluxos elementares produzidos em cada enrolamento pelas correntes dos restantes,

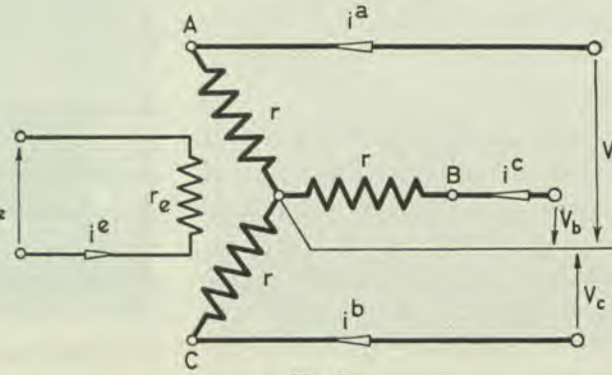

Fig. 1

obtemos o fluxo total do respectivo circuito. Assim:

$$\begin{cases} \varphi_a = l_{aa}i^a + l_{ab}i^b + l_{ac}i^c + l_{ae}i^e \\ \varphi_b = l_{ba}i^a + l_{bb}i^b + l_{bc}i^c + l_{be}i^e \\ \varphi_c = l_{ca}i^a + l_{cb}i^b + l_{cc}i^c + l_{ce}i^e \\ \varphi_e = l_{ea}i^a + l_{eb}i^b + l_{ec}i^c + l_{ee}i^e \end{cases}$$

Os dois sistemas de equações que acabámos de deduzir constituem no seu conjunto as *equações gerais da máquina síncrona.*

Estas equações podem ser escritas de maneira consideràvelmente abreviada, considerando as seguintes matrizes:

Matriz tensão $V = \begin{Vmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_e \end{Vmatrix}$ *Matriz fluxo* $\Phi = \begin{Vmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \varphi_c \\ \varphi_e \end{Vmatrix}$

Matriz corrente *Matriz resistência*

$I = \begin{Vmatrix} i^a \\ i^b \\ i^c \\ i^e \end{Vmatrix}$ $R = \begin{Vmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_e \end{Vmatrix}$

Matriz indutância $L = \begin{Vmatrix} l_{aa} & l_{ab} & l_{ac} & l_{ae} \\ l_{ba} & l_{bb} & l_{bc} & l_{be} \\ l_{ca} & l_{cb} & l_{cc} & l_{ce} \\ l_{ea} & l_{eb} & l_{ec} & l_{ee} \end{Vmatrix}$

A bem conhecida regra do produto matricial permite pôr:

$$V = \frac{d\Phi}{dt} + RI$$

$$\Phi = LI$$

São estas, na sua forma matricial, as equações gerais do motor síncrono.

COMPOSIÇÃO DA MATRIZ INDUTÂNCIA

É fácil constatar que as componentes da matriz L são função do tempo. Por exemplo a indutância l_{aa}, definida pelo cociente φ_a/i^a quando $i^b = i^c = i^e = 0$, vem maior ou menor conforme a localização, variável no tempo, da roda polar. Isto se deve ao facto da relutância de um rotor de polos salientes não ser a mesma em todas as direcções, tendo valor mínimo na direcção do eixo polar (*eixo longitudinal* ou *directo*) e máximo na direcção perpendicular (*eixo transversal* ou *em quadratura*). Durante o movimento rotórico, efectuado à velocidade angular constante ω, é por isso oposta à passagem do fluxo criado na fase A pela corrente i^a uma relutância variável, que se repete em intervalos iguais. A indutância será por consequência variável segundo uma lei periódica, que toma no caso das máquinas industriais a forma seguinte, experimentalmente comprovada:

$$l_{aa} = l_1 + l_m \cos 2\alpha$$

l_1 mede o valor médio, l_m a amplitude da variação de l_{aa} e α o deslocamento angular do eixo rotórico directo relativamente ao eixo da fase A (Fig. 2). Como este eixo mantém posição inalterável, podemos pôr:

$$\alpha = \omega t + \alpha_0$$

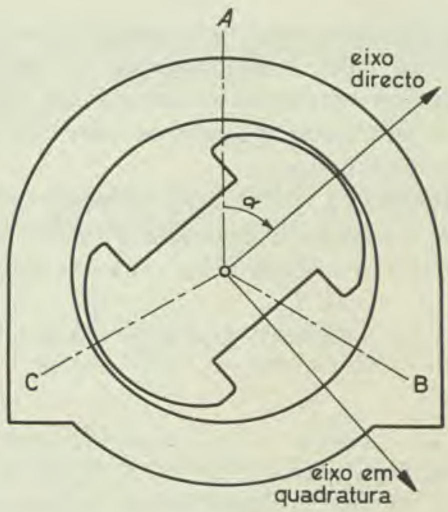

Fig. 2

exprimindo por α_0 o deslocamento inicial ($t = 0$) do eixo directo.

As indutâncias próprias dos enrolamentos das outras fases verificam lei análoga, apenas se distinguindo pelo facto de virem atrasados os instantes de máximo. Escreveremos pois:

$$l_{bb} = l_1 + l_m \cos (2\alpha + 120)$$

$$l_{cc} = l_1 + l_m \cos (2\alpha - 120)$$

Uma lei deste tipo é válida ainda para as indutâncias mútuas entre fases. Os instantes de máximo correspondem agora a ângulos α para os quais o eixo directo é a bissectriz do ângulo agudo constituído pelos eixos das fases interessadas. Mas ao contrário das indutâncias próprias, que são sempre positivas, estas indutâncias mútuas são negativas.

Para cada uma delas teremos:

$$l_{ab} = l_{ba} = -m_1 + l_m \cos\,(2\,\alpha - 120)$$

$$l_{bc} = l_{cb} = -m_1 + l_m \cos\,2\,\alpha$$

$$l_{ca} = l_{ac} = -m_1 + l_m \cos\,(2\,\alpha + 120)$$

designando por m_1 o valor médio destas indutâncias.

As indutâncias mútuas entre enrolamentos estatórico e rotórico são máximas quando o eixo directo coincide com o eixo da fase considerada. Mas fazendo girar o rotor de 180º, tais indutâncias conservam-se trocando de sinal: a frequência da sua variação é por isso igual à velocidade da máquina. Então:

$$l_{ea} = l_{ae} = m_e \cos\,\alpha$$

$$l_{eb} = l_{be} = m_e \cos\,(\alpha - 120)$$

$$l_{ec} = l_{ce} = m_e \cos\,(\alpha + 120)$$

onde m_e designa a amplitude máxima das indutâncias mútuas entre o enrolamento de excitação e cada um dos enrolamentos estatóricos, isto é, o valor da indutância quando os dois circuitos se encontram alinhados.

Finalmente, a indutância própria do enrolamento de excitação, desprezada a ligeira oscilação do seu fluxo provocada pelas ranhuras estatóricas, é constante e vale l_{ee}.

A matriz indutância tem pois a seguinte composição:

$$L = \begin{Vmatrix} l_1 + l_m \cos 2\alpha & -m_1 + l_m \cos(2\alpha - 120) & -m_1 + l_m \cos(2\alpha + 120) & m_e \cos\alpha \\ -m_1 + l_m \cos(2\alpha - 120) & l_1 + l_m \cos(2\alpha + 120) & -m_1 + l_m \cos 2\alpha & m_e \cos(\alpha - 120) \\ -m_1 + l_m \cos(2\alpha + 120) & -m_1 + l_m \cos 2\alpha & l_1 + l_m \cos(2\alpha - 120) & m_e \cos(\alpha + 120) \\ m_e \cos\alpha & m_e \cos(\alpha - 120) & m_e \cos(\alpha + 120) & l_{ee} \end{Vmatrix}$$

INDUTANCIAS SINCRONAS

O estudo analítico das máquinas síncronas tornar-se-ia inextrincável se pretendêssemos deduzi-lo das equações gerais atrás enunciadas. A complicação deriva sobretudo da complexidade das expressões das indutâncias; acresce que l_1, l_m e m_1 se não podem determinar directamente senão por meio de ensaios morosos e delicados.

Por tais razões há muito se popularizaram certas indutâncias provenientes da combinação das indutâncias mencionadas nos parágrafos anteriores, de fácil determinação por meio de ensaios muito simples e conduzindo a equações de estado notàvelmente simplificadas. Quero referir-me às *indutâncias síncronas*.

É bem sabido que da associação das forças magnetomotrizes dos enrolamentos de uma máquina polifásica resulta um campo girante que se desloca à velocidade angular $\omega = 2\,\pi\,f$, em sincronismo com o rotor se a máquina for síncrona.

Quando a direcção do campo girante coincide com o eixo directo do rotor (ou seja $\alpha_o = 0$, Figs. 2 e 3a) e a corrente de excitação é nula, será máximo o fluxo do campo girante correspondente a dada corrente estatórica: a indutância do circuito magnético será por consequência máxima. Assim fica definida a *indutância síncrona directa* l_d.

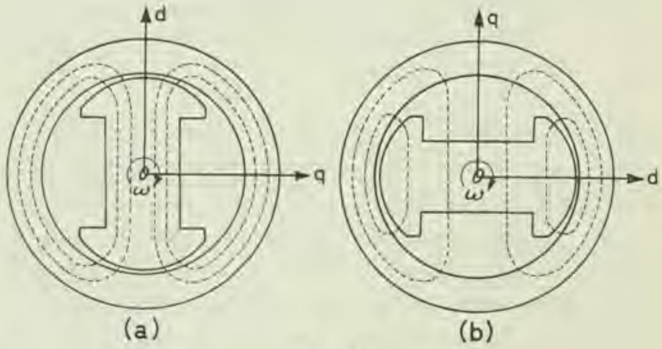

Fig. 3

Pelo contrário, quando a direcção do campo girante coincide com o eixo transverso ($\alpha_o = -90º$, Fig. 3b), a indutância do circuito é mínima e constitui a *indutância síncrona em quadratura* l_q.

Finalmente, quando são as três fases simultâneamente percorridas pela mesma corrente sinusoidal, ainda com excitação nula e o rotor girando a uma velocidade qualquer, a pequena indutância assim realizada denomina-se *indutância síncrona homopolar* l_o.

Um ensaio de deslizamento permite determinar as duas primeiras. Aplicando ao estator uma tensão trifásica externa e fazendo girar o rotor não excitado a velocidade ligeiramente inferior à de sincronismo, as correntes e tensões serão moduladas à frequência do deslizamento. Os cocientes máximo e mínimo entre estas duas grandezas medem precisamente as indutâncias directa e em quadratura multiplicadas por ω.

A reactância homopolar ωl_o pode medir-se pelo cociente entre a tensão e a corrente de uma fase da máquina, quando os enrolamentos das três fases são alimentados em série por uma tensão monofásica.

É possível relacionar as indutâncias síncronas com as componentes da matriz L. Basta calcular em cada um dos três casos o cociente entre o fluxo e a corrente por fase, cociente que por definição designa as indutâncias síncronas em cada caso. Por exemplo, com $\alpha_o = 0$, o fluxo da fase A vale

$$\varphi_a = (l_1 + l_m \cos 2\omega t)\, I \cos \omega t +$$

$$+ [-m_1 + l_m \cos (2\omega t - 120)]\, I \cos (\omega t - 120) +$$

$$+ [-m_1 + l_m \cos (2\omega t + 120)]\, I \cos (\omega t + 120)$$

Simplificando fica:

$$\varphi_a = (l_1 + m_1 + \frac{3}{2} l_m)\, I \cos \omega t$$

ou seja:

$$l_d = \frac{\varphi_a}{i^a} = l_1 + m_1 + \frac{3}{2} l_m$$

Do mesmo modo se calculariam as restantes indutâncias síncronas:

$$l_q = l_1 + m_1 - \frac{3}{2} l_m$$

$$l_o = l_1 - 2m_1$$

Como seria de esperar, os valores de l_d, l_q, l_o são constantes e independentes do tempo.

TRANSFORMAÇÃO DE PARK

Se a matriz I é sujeita a uma transformação que a modifica em nova matriz I' por intermédio da *matriz de transformação* C de tal modo que

$$I = C\, I',$$

todas as restantes grandezas matriciais (tensões, fluxos, indutâncias, etc.) são igualmente transformadas, de acordo com leis de correlação em que apenas intervêm a matriz C ou matrizes dela derivadas e as duas formas correlatas da grandeza transformada.

Transformações deste tipo correspondem a novos arranjos das derivações do esquema primitivo, de modo que se obtenham esquemas diferentes do primeiro, mas conservando sempre a mesma potência. Nas possíveis transformações de dado sistema, arbitràriamente fixadas por valores particulares da matriz C, é de facto categórico o seguinte imperativo: ser a potência total um invariante do sistema.

Nestas condições, as leis de correlação são as seguintes [1]:

1 — *para as grandezas covariantes* (tensão, fluxo, etc.):

$$F' = C_t\, F$$

F — matriz da grandeza covariante antes da transformação
F' — matriz da grandeza covariante após a transformação
C_t — transposta da matriz C

2 — *para as grandezas contra-variantes* (intensidade, etc.):

$$G' = C^{-1}\, G$$

G — matriz da grandeza contra-variante antes da transformação
G' — matriz após transformação
C^{-1} — inversa da matriz C

3 — *para as grandezas duas vezes covariantes* (resistência, indutância, etc.):

$$H' = C_t\, H\, C$$

A *transformação de Park* [2] é uma transformação particular definida pela matriz:

$$C = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 1 & 0 \\ \cos(\alpha - 120) & -\operatorname{sen}(\alpha - 120) & 1 & 0 \\ \cos(\alpha + 120) & -\operatorname{sen}(\alpha + 120) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

que goza da propriedade de transferir para eixos ligados ao rotor o sistema de referência vinculado, como se estabelece no início deste artigo, aos eixos fixos das três fases do estator.

Esta matriz C conserva os elementos já anteriormente referidos ao rotor (corrente de excitação, fluxo de excitação, etc.) mas altera todos os restantes. Por exemplo a matriz intensidade transformada terá nova composição, que representaremos assim:

$$I' = \begin{Vmatrix} i^d \\ i^q \\ i^o \\ i^e \end{Vmatrix}$$

Vamos calcular as transformadas das matrizes V, Φ, R, L, I.

[1] Para a justificação destas expressões, ver por exemplo a minha *Análise Matricial das Redes e Máquinas Eléctricas*

[2] R. H. PARK, *Two-Reaction Theory of Synchronous Machines* — Part I, *Generalized Method of Analysis*, AIEE Trans., Vol. 48, Julho de 1929

A *matriz tensão transformada*, obtida pelo produto matricial $V' = C_t\, V$, tem as seguintes componentes:

$$V' = \left\| \begin{matrix} v_a \cos\alpha + v_b \cos(\alpha + 120) + v_c \cos(\alpha + 120) \\ -v_a \operatorname{sen}\alpha - v_b \operatorname{sen}(\alpha - 120) - v_c \operatorname{sen}(\alpha + 120) \\ v_a + v_b + v_c \\ v_e \end{matrix} \right\|$$

No novo sistema de referência os elementos desta matriz serão assim representados:

$$V' = \left\| \begin{matrix} \frac{3}{2} v_d \\ \frac{3}{2} v_q \\ 3\, v_o \\ v_e \end{matrix} \right\|$$

adoptando-se os coeficientes numéricos arbitrários $\frac{3}{2}$ e 3 para simplificar as equações posteriores.

A *matriz fluxo transformado*, obtida pela lei de formação das grandezas covariantes ($\Phi' = C_t\, \Phi$), tem a seguinte constituição:

$$\Phi' = \left\| \begin{matrix} \frac{3}{2} \varphi_d \\ \frac{3}{2} \varphi_q \\ 3\, \varphi_o \\ \varphi_e \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \varphi_a \cos\alpha + \varphi_b \cos(\alpha - 120) + \\ + \varphi_c \cos(\alpha + 120) \\ -\varphi_a \operatorname{sen}\alpha - \varphi_b \operatorname{sen}(\alpha - 120) - \\ - \varphi_c \operatorname{sen}(\alpha + 120) \\ \varphi_a + \varphi_b + \varphi_c \\ \varphi_e \end{matrix} \right\|$$

A *matriz resistência transformada*, calculada pela regra típica das grandezas duas vezes covariantes ($R' = C_t R\, C$), virá:

$$R' = \left\| \begin{matrix} \frac{3}{2} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\, r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_e \end{matrix} \right\|$$

A *matriz indutância transformada* determina-se pela mesma regra. O trabalho exigido para efectuar o produto matricial $C_t L\, C$ é enorme, mas as duas ou três longas horas de cálculo encontram seu prémio compensador na simplicidade do resultado, que encantaria o próprio Pitágoras:

$$L' = \left\| \begin{matrix} \frac{3}{2} l_d & 0 & 0 & \frac{3}{2} m_e \\ 0 & \frac{3}{2} l_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\, l_o & 0 \\ \frac{3}{2} m_e & 0 & 0 & l_{ee} \end{matrix} \right\|$$

Finalmente, a *matriz intensidade transformada*, expressa pela relação

$$I' = C^{-1} I\ ,$$

exige o conhecimento da inversa de C; a regra bem conhecida dá:

$$C^{-1} = \left\| \begin{matrix} \frac{2}{3} \cos\alpha & \frac{2}{3} \cos(\alpha - 120) & \frac{2}{3} \cos(\alpha + 120) & 0 \\ -\frac{2}{3} \operatorname{sen}\alpha & -\frac{2}{3} \operatorname{sen}(\alpha - 120) & -\frac{2}{3} \operatorname{sen}(\alpha + 120) & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

EQUAÇÕES GERAIS TRANSFORMADAS DO MOTOR SÍNCRONO

De posse dos elementos das principais matrizes após a transformação de Park, estamos aptos a deduzir a forma nova que revestem as equações gerais estabelecidas no primeiro parágrafo. Teremos em primeiro lugar:

$$\Phi' = L'\, I'$$

como se demonstra da seguinte maneira:

$$\Phi' = C_t \Phi = C_t L\, I = C_t L\, C\, I' = L'\, I'$$

Donde se conclui que o aspecto formal da relação entre a matriz fluxo e a matriz corrente não se altera na passagem do primitivo para o novo sistema de referência.

O mesmo se não dá com a expressão da lei de Ohm, que tinha como vimos a forma seguinte:

$$V = \frac{d\Phi}{dt} + R\, I$$

Agora será:

$$V' = C_t V = C_t \left(\frac{d\Phi}{dt} + R\,I \right) = C_t \frac{d\Phi}{dt} + C_t R\,I =$$

$$= C_t \frac{d\Phi}{dt} + C_t R\,C\,I' = C_t \frac{d\Phi}{dt} + R'\,I'$$

Para calcular $C_t \dfrac{d\Phi}{dt}$, derivemos $\Phi' = C_t \Phi$ em ordem ao tempo. Vem:

$$\frac{d\Phi'}{dt} = \frac{dC_t}{dt}\Phi + C_t \frac{d\Phi}{dt}$$

donde:

$$C_t \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi'}{dt} - \frac{dC_t}{dt}\Phi$$

Substituindo fica:

$$V' = \frac{d\Phi'}{dt} + R'\,I' - \frac{dC_t}{dt}\Phi$$

Pelo facto da matriz de transformação ser função do tempo, o aspecto formal da lei de Ohm não se conserva na passagem do antigo para o novo referencial [3]. O termo perturbador vale:

$$\frac{dC_t}{dt}\Phi = \omega \begin{Vmatrix} \frac{3}{2}\varphi_q \\ -\frac{3}{2}\varphi_d \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Podemos combinar a lei de Ohm transformada com a lei do fluxo, pondo na primeira $L'\,I'$ em vez de Φ' e atendendo a que L' é independente do tempo. Virá:

$$V' = L' \frac{dI'}{dt} + R'\,I' - \omega \begin{Vmatrix} \frac{3}{2} l_q i^q \\ -\frac{3}{2} l_d i^d - \frac{3}{2} m_e i^e \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Feitas todas as substituições e efectuados os produtos matriciais, encontra-se finalmente o seguinte sistema de equações, que relaciona as tensões com as correntes de Park:

$$\begin{cases} v_d = l_d \dfrac{di^d}{dt} + ri^d - \omega\, l_q i^q + m_e \dfrac{di^e}{dt} \\ v_q = \omega\, l_d i^d + l_q \dfrac{di^q}{dt} + ri^q + \omega\, m_e i^e \\ v_o = l_o \dfrac{di^o}{dt} + ri^o \\ v_e = \dfrac{3}{2} m_e \dfrac{di^d}{dt} + l_{ee} \dfrac{di^e}{dt} + r_e i^e \end{cases}$$

TEORIA DAS DUAS REACÇÕES. DIAGRAMA VECTORIAL

O caso especial que neste momento nos interessa analisar é o referente aos dados de partida na teoria das duas reacções. Suporemos pois i^e constante e trifásicas as correntes estatóricas permanentes, isto é,

$$I = \begin{Vmatrix} I_m \cos(\omega t + \beta) \\ I_m \cos(\omega t + \beta - 120) \\ I_m \cos(\omega t + \beta + 120) \\ i^e \end{Vmatrix}$$

As correntes de Park, definidas pela relação $I = C^{-1}\,I'$, são:

$$I' = \begin{Vmatrix} I_m \cos\beta \\ I_m \operatorname{sen}\beta \\ 0 \\ i^e \end{Vmatrix}$$

Enquanto a componente homopolar é nula, as componentes directa e transversal da matriz intensidade transformada representam as projecções de um vector de amplitude I_m sobre dois eixos ortogonais imóveis no espaço. Se tomarmos o eixo directo como eixo real e o eixo em quadratura como imaginário, o vector $\overline{I}$ representativo da corrente estatórica após a transformação de Park vale:

$$\overline{I} = i^d + j i^q$$

[3] O mesmo se passa com as acelerações nos movimentos relativos: à soma das acelerações relativa e de transporte deve adicionar-se a de Coriolis para se obter a aceleração absoluta. O termo $\dfrac{dC_t}{dt}\Phi$ pode por analogia considerar-se uma força electromotriz de Coriolis, devida ao movimento de rotação dos eixos ligados ao rotor.

As tensões de Park, dadas pelo sistema de equações estabelecido no fim do parágrafo precedente, são agora:

$$\begin{cases} v_d = ri^d + \omega l_q i^q \\ v_q = \omega l_d i^d + ri^q + \omega m_e i^e \\ v_o = 0 \\ v_e = r_e i^e \end{cases}$$

Fácil é verificar que as duas primeiras equações exprimem precisamente o conteudo da teoria das duas reacções.

Comecemos por notar que quando a máquina trabalha em vazio ($i^d = i^q = 0$) é $v_d = 0$ e $v_q = \omega m_e i^e$. Neste caso a tensão v_q representa a *força electromotriz atrás da reactância síncrona* (para usar a expressão americana tão sugestiva), figurada no sistema de eixos considerado pelo vector:

$$\overline{E} = j\ \omega m_e i^e$$

O vector $\overline{E}$ não tem componente real, define por isso rigorosamente a direcção do eixo imaginário.

Tomando como componente real do vector tensão aplicada $\overline{V}$ a componente directa v_d e como componente imaginária a tensão de Park v_q (o que é perfeitamente correcto), teremos:

$$\overline{V} = v_d + jv_q$$

ou seja

$$\overline{V} = \overline{E} + r\overline{I} + jx_d i^d - x_q i^q$$

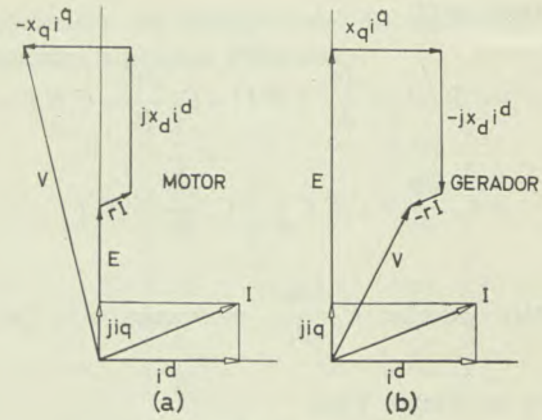

Fig. 4

A Fig. 4a traduz gràficamente este conjunto de conclusões. Viemos cair, como o leitor já notou, em plena teoria das duas reacções.

Falta adaptar as equações anteriores ao estudo da máquina síncrona trabalhando como gerador. As quedas internas subtraem-se nesse caso à força electromotriz, para resultar a tensão nos terminais da máquina. A última equação tomará por isso a forma:

$$\overline{V} = \overline{E} - r\overline{I} - jx_d i^d + x_q i^q$$

A interpretação vectorial desta equação indica-se na Fig. 4b. É o diagrama clássico de Blondel para alternadores de polos salientes.

N. da R. — Na figura acima deve lêr-se ji^q em vez de jiq.