

INTRODUÇÃO À TEORIA DO CONTROLE *

Este trabalho nasceu do desejo de esclarecer conceitos e processos usados no tratamento de problemas de controle a nível teórico. Neste sentido ele não é um repositório de uma experiência de muitos anos neste campo, mas sim, procura ser, como indicamos no título, uma «introdução», um «acesso» ao tratamento teórico de problemas de controle.

Por supormos o tema um pouco especializado, escrevemos um primeiro capítulo «Considerações Preliminares» destinado ao leitor que pela primeira vez se ocupe destes assuntos. Neste capítulo procuramos «conversar» um pouco sobre certas noções basilares e sobre a natureza das dificuldades dos problemas de controle. Aqui sacrificamos algumas vezes o rigor à objectividade.

Para quem estes assuntos não sejam novos, consideramos dispensável a leitura deste primeiro capítulo.

Ao terminar esta apresentação desejamos ainda deixar aqui um agradecimento muito sincero ao Eng.^o Fernando Soares David, do Serviço de Estudos da Hidro-Eléctrica do Cávado, pelas suas valiosas sugestões e estímulo que sempre nos deu.

1 — Considerações preliminares

Vamos principiar por nos referir a noções basilares que utilizaremos nesta exposição. No sentido de as concretizarmos, recorreremos ao exemplo indicado na fig. 1. Nesta figura temos um reservatório R_1 , com água ao nível h_1 , variável, que vai alimentar através de uma válvula V_1 , de abertura a_1 , o reservatório R_2 . Este, por seu turno, lança a sua água no exterior através da válvula V_2 , de abertura a_2 . Um operador poderá através do dispositivo da figura actuar na válvula V_1 . Supõe-se que a abertura da válvula V_2 foi deixada numa posição fixa ($a_2 = A_2$). No reservatório R_2 existe ainda uma boia S , com uma haste, que dá indicação ao operador do nível de água h_2 . Encontraremos desde já concretizada neste exemplo a noção intuitiva de *comando*, se repararmos que o nível de água h_2 é *comandado* pela abertura a_1 da válvula V_1 . Atendendo a que alguns autores utilizam as designações *comando em ciclo fechado* e *comando em ciclo aberto*, esclareceremos que nos referimos a *comando em ciclo aberto* sempre que nesta exposição mencionarmos simplesmente *comando*. Referir-nos-emos agora à noção de *regulação*.

O papel da regulação consiste em manter um certo valor (*valor prescrito*)¹ de uma grandeza física (*grandeza a regular*), neutralizando as acções de outras grandezas (*grandezas perturbadoras*) que perturbem a manutenção desse valor. Vamos lançar mão da fig. 1 para concretizarmos o caso da regulação de uma grandeza num sistema.

Na fig. 1 principiaremos por supor que pretendemos que a altura h_2 tome um certo valor H_2 . O operador actuará na válvula V_1 , dando-lhe uma abertura A_1 , de maneira a ser $h_2 = H_2$. Admitindo que no momento em que foi terminada a operação h_1 é igual a H_1 , poderemos considerar um estado em que $h_1 = H_1$, $h_2 = H_2$ e $a_2 = A_2$. O valor de h_1 poderá todavia variar de um momento para o outro e logo que isso suceda o estado que acabamos de considerar será *perturbado*, modificando-se também o valor de h_2 , que passa a ser diferente de H_2 . Se pretendemos agora que h_2 retome o valor de H_2 , o nosso operador terá que actuar de novo em a_1 de modo a neutralizar a *perturbação* introduzida por h_1 . Vejamos então que funções teria que

desempenhar o nosso operador se lhe déssemos por missão manter o valor de h_2 igual a H_2 :

- observar constantemente a diferença entre o valor real de h_2 e o seu valor prescrito H_2 .
- actuar em a_1 , em função da diferença $h_2 - H_2$, de modo a neutralizar a influência perturbadora de h_1 .

Se desejássemos substituir o nosso operador por uma «má-

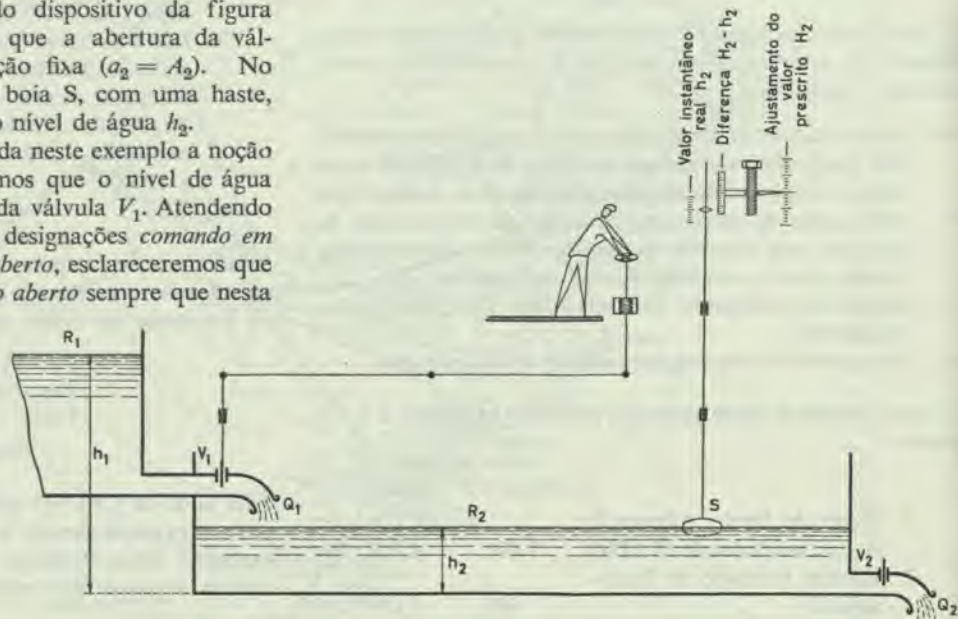


Fig. 1

quina» (chamemos-lhe provisoriamente assim) ela teria pois que executar as funções seguintes:

- medir constantemente a diferença $h_2 - H_2$
- actuar em a_1 , em função dessa diferença, $h_2 - H_2$, de modo a neutralizar a influência perturbadora de h_1 ².

* Devido à sua extensão, este trabalho não pode ser publicado senão dividindo-o por 3 números.

¹ Na prática este valor pode ser constante ou variável segundo um programa ou influência de outras grandezas. Notaremos porém que a reprodução fiel das variações deste valor na grandeza a regular já não é papel da regulação como veremos.

² Atendendo a que a potência em jogo na medida é em geral bastante inferior à potência em jogo na actuação, torna-se necessária em geral uma amplificação.

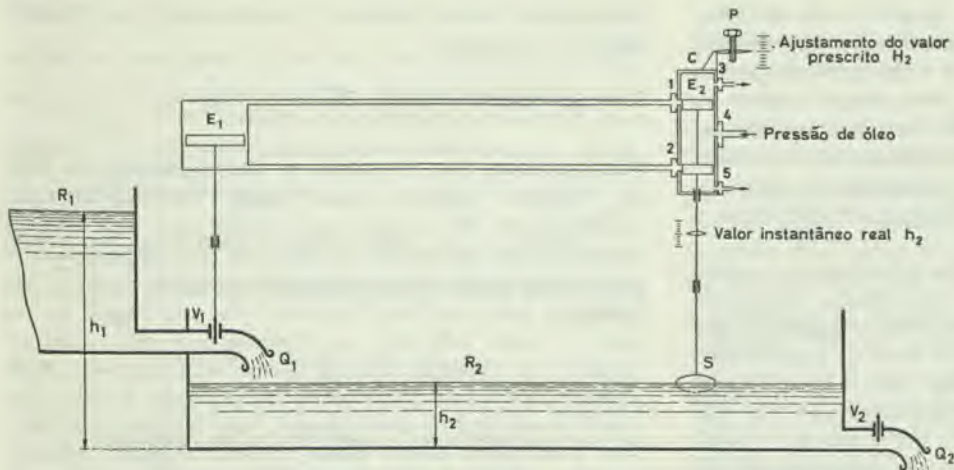


Fig. 2

Chamaríamos *regulador* a uma «máquina» que executasse estas funções e *sistema a regular* ao sistema que o *regulador* comanda.

Nesta altura dos nossos conhecimentos poderíamos, evocando a nossa intuição, idealizar um regulador para o nosso sistema como o indicado na fig.2, que representa um regulador com o respectivo sistema a regular. O nosso regulador conforme mostra a figura seria constituído por um cilindro *C*, fixado a um parafuso *P*, por meio do qual se poderia elevar ou baixar o nosso cilindro. Dentro deste cilindro podem-se mover dois êmbolos *E*₂, ligados por uma haste ao flutuador *S*. A válvula *V*₁ é agora accionada pelo êmbolo *E*₁. Nestas condições as diferenças $h_2 - H_2$ entre valor real e valor prescrito do nível de água traduzem-se por uma abertura maior ou menor dos orifícios 1 e 2, do que vai resultar uma face do êmbolo *E*₁ receber pressão dos orifícios 1 ou 2 e conseqüentemente mover-se num sentido ou noutro, actuando sobre *V*₁ de modo a neutralizar, a influência perturbadora de h_1 . O parafuso *P* serve-nos, como dissemos, para elevar ou baixar a posição do cilindro, do que resulta uma variação do valor prescrito H_2 .

Se atentarmos na fig. 2, veremos que duas grandezas, o nível de água h_1 e a abertura a_1 da válvula *V*₁, influenciaram o caudal Q_1 . Por seu turno o caudal Q_1 comanda a altura h_2 no sistema a regular, indo depois essa grandeza h_2 comandar, através do regulador, a grandeza abertura a_1 da válvula *V*₁ e conseqüentemente o caudal Q_1 .

Depois destas considerações, fácil nos é compreender uma representação, como indicada na figura 3, da qual tiramos a representação da fig. 4.

Voltaremos a referir-nos mais tarde a representações semelhantes a estas, notemos porém desde já que na fig. 4 o nosso sistema a regular *S* é alimentado pelo resultado da acção duma grandeza perturbadora h_1 à qual se adiciona algebricamente a acção de uma outra grandeza a_1 comandada pela grandeza a regular h_2 que surge à saída do nosso sistema *S*. Quando um sistema é alimentado pela sua grandeza de saída directamente ou por uma outra grandeza comandada por esta (como foi o nosso caso) diz-se que o sistema é *realimentado* e o conjunto do percurso fechado que se constitui designa-se por *circuito de controle*.

Vamos ocupar-nos agora da noção *servidão*. O papel de *servidão* é fazer com que as variações de uma grandeza (*grandeza de referência*) sejam fielmente reproduzidas por outra (*grandeza a controlar*). O sistema realimentado, com amplificação de potência, onde uma *servidão* tem lugar designa-se por *servo mecanismo*. Concretizaremos esta noção, utilizando de novo a fig. 2. Suponhamos que imprimimos ao cilindro *C* um movimento vertical regido por uma lei $H_2(t)$, para o que bastaria substituir o parafuso *P* por um dispositivo que solicitasse o nosso cilindro a mover-se segundo essa lei. Se o nível de água h_2 reproduzisse numa certa escala fielmente a lei de variação do movimento do cilindro *C*, estaríamos perante uma *servidão*³. A representação correspondente à da fig. 4, do funcionamento do sistema como servo-mecanismo puro seria a da fig. 5, em que relativamente à fig. 4 não consideramos a perturbação h_1 e introduzimos a acção da grandeza de referência H_2 .

Se o nível de água h_2 reproduzisse numa certa escala fielmente a lei de variação do movimento do cilindro *C*, estaríamos perante uma *servidão*³. A representação correspondente à da fig. 4, do funcionamento do sistema como servo-mecanismo puro seria a da fig. 5, em que relativamente à fig. 4 não consideramos a perturbação h_1 e introduzimos a acção da grandeza de referência H_2 .

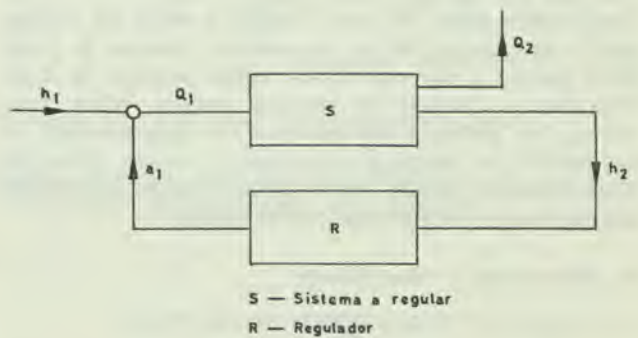


Fig. 3

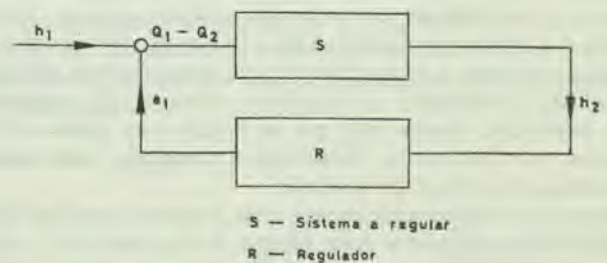


Fig. 4

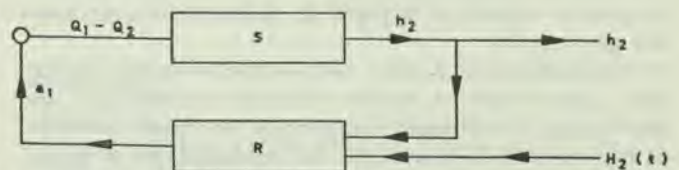


Fig. 5

³ Atendendo a que uma neutralização de grandezas perturbadoras continua a ter lugar, rigorosamente, o nosso sistema funciona agora como regulador e servo-mecanismo simultaneamente.

Acrescentamos que as funções de *regulação* e de *servidão*, entendidas respectivamente como neutralização de grandezas perturbadoras e reprodução fiel de uma grandeza podem ser separadamente desempenhadas pelo mesmo sistema ou ainda exercerem-se simultaneamente num mesmo sistema. Neste sentido englobaremos os problemas de regulação e servidão na designação geral de problemas de controle, conservando as nomenclaturas *grandeza de referência* e *grandeza a controlar*.

Antes de terminar estas considerações preliminares faremos ainda referência às dificuldades que um problema de controle põe. Voltemos à fig. 2 onde consideramos o regulador que nos foi sugerido pela nossa intuição, e antes de o aceitarmos definitivamente, façamos uma análise mais cuidada. Suponhamos que um dado estado de funcionamento, em que $h_2 = H_2$, é alterado e que h_2 se torna maior que H_2 . O regulador actuará diminuindo o caudal Q_1 , primeiro até um valor menor que Q_2 e depois até que H_2 seja atingido. Nessa altura o êmbolo E_2 fecha a admissão de óleo e o movimento da válvula V_1 cessa. Como porém $Q_1 < Q_2$, h_2 continua a baixar tornando-se menor que H_2 e o êmbolo E_2 actua no sentido de abrir a válvula V_1 , podendo assim ter lugar várias oscilações em torno de uma posição H_2 . Estas oscilações podem ser amortecidas, permanentes ou amplificadas, dizendo-se nestes dois últimos casos que o circuito de controle é *instável*. Ora, nós pretendemos na prática sistemas estáveis com uma certa *rapidez* e uma certa *precisão*,⁴ e com os conhecimentos de que dispomos neste momento, nada podemos dizer sob este ponto de vista acerca do sistema que foi sugerido pela nossa intuição.

Chamaremos então em nosso auxílio a teoria de controle que fornece meios não só de analisar sistemas já projectados quanto à sua estabilidade como também dá directivas para o projecto de sistemas estáveis. Além disso, através dela podemos aperceber-nos do comportamento de sistemas no que respeita à sua *rapidez* e *precisão*. Disso nos ocuparemos em seguida, considerando as partes «Introdução à estabilidade» e «Estabilidade de sistemas».

2 — Introdução à estabilidade

2.1 FENÓMENOS TRANSITÓRIOS NO CONTROLE

Sempre que se verifica qualquer variação numa grandeza de um circuito de controle, ele é sede de fenómenos transitórios. O conhecimento destes fenómenos transitórios em si, e a possibilidade de podermos concluir a partir deles qual é o estado permanente final, e se este existe⁵, permitir-nos-á conhecer o comportamento do nosso sistema perante qualquer perturbação ou qualquer variação da grandeza de referência. Vemos pois que se justifica um estudo cuidadoso dos fenómenos transitórios a considerar num dado sistema para efeitos de controle.

Como a seu tempo veremos, um meio poderoso para estudar fenómenos transitórios num sistema, é a recorrência à sua *característica de frequência* estabelecida a partir de dados fornecidos pelo comportamento do sistema, quando excitado por oscilações sinusoidais e considerando somente a sua resposta permanente. Trata-se pois do estudo de fenómenos transitórios a partir de dados colhidos em estados permanentes.

A *transformação de Laplace* além de prestar valioso serviço nesta determinação é também bastante esclarecedora no que respeita à utilização e significado de alguns conceitos de que teremos de lançar mão na exposição que se segue. Passaremos pois a expor a *transformação de Laplace*. Apresentá-la-emos como uma solução para as dificuldades

encontradas numa possível *transformação de Fourier*, seguindo DOETSCH⁶.

2.2 A TRANSFORMAÇÃO DE LAPLACE E O SEU SIGNIFICADO FÍSICO

Principiaremos por relembrar a decomposição em série de FOURIER. Definida uma função $f(t)$ no intervalo $-\frac{T}{2} \leq t \leq +\frac{T}{2}$, esta função é susceptível, em condições muito gerais, duma representação nesse intervalo da forma:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \quad (1)$$

em que os coeficientes c_n serão dados pela expressão

$$c_n = \frac{2\pi}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt \quad (2)$$

Isto corresponde a afirmar que no intervalo considerado a nossa função $f(t)$ é igual à soma de funções sinusoidais de frequências $n \cdot \frac{2\pi}{T}$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2$, etc., das quais existe sempre um número maior ou igual a um no intervalo considerado.

Como resulta das considerações feitas os c_n terão a forma seguinte:

$$c_n = r_n e^{-jn\varphi_n} \quad (3)$$

e deste modo o termo de ordem n terá a configuração:

$$A_n = c_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t} = r_n e^{jn \left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi_n \right)} \quad (4)$$

que corresponde a uma oscilação sinusoidal de amplitude r_n , frequência $n \cdot \frac{2\pi}{T}$ e fase $n\varphi_n$ em que $n = 0, \pm 1, \pm 2$, etc.

Deste modo podemos pois dizer que os c_n determinam o espectro da função $f(t)$, pois indicam para as diferentes frequências, a amplitude e fase das funções sinusoidais componentes.

Se alargarmos o domínio da função $f(t)$ de

$$-\frac{T}{2} \leq t \leq +\frac{T}{2} \text{ a } -\infty \leq t \leq +\infty$$

a nossa função passará a exprimir-se segundo:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5)$$

a que chamaremos Integral de FOURIER e em que

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (6)$$

⁴ Algumas destas qualidades são incompatíveis.

⁵ No caso do sistema ser instável e na hipótese que fazemos de ligações lineares é lícito considerar que um estado permanente final não seja atingido. Acrescentaremos que esta hipótese é legítima no estudo dos sistemas reais, desde que as variações de grandezas se reduzam a oscilações de pequena amplitude.

⁶ Beihefte zur Regelungstechnik, «Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung in der Regelungstechnik», Muenchen 1955, Verlag R. Oldenbourg.

Note-se que a passagem de (1) e (2) para (5) e (6) se pode traduzir na substituição da variável descontínua $\omega_n = n \cdot \frac{2\pi}{T}$ pela variável contínua ω , sendo o *passo* finito das frequências $\frac{2\pi}{T}$ substituído pelo *passo* infinitesimal $d\omega$. Assim, a c_n corresponderá $F(\omega) \cdot d\omega$.

Enquanto no caso anterior se tratava da decomposição de uma função num conjunto de funções sinusoidais, cujas frequências constituíam um conjunto discreto, aqui teremos que as frequências em questão constituem um conjunto contínuo, isto é, enquanto no primeiro caso a uma função correspondia um conjunto discreto de valores, neste caso a uma função corresponde uma outra função, a que poderíamos chamar transformada da primeira segundo FOURIER. Nestas condições parece termos resolvido o problema de, dada uma certa função, saber com que amplitude e com que fase uma certa frequência nela participa. Na realidade uma dificuldade encontra-se oculta. Enquanto o integral (2) existe para toda a função (1) integrável, o integral (6) terá sentido somente quando a função $f(t)$ se comportar de forma que o integral correspondente seja convergente no infinito, e esta condição não se satisfaz, nem sequer para $f(t) = \text{constante}$ ou $f(t) = e^{j\omega t}$.

Vamos procurar torneir esta dificuldade.

Em primeiro lugar notaremos que as variações de t desde $-\infty$ a $+\infty$ não interessam nos problemas físicos, onde só conta $t \geq 0$. Isto permitir-nos-á utilizar apenas funções $f(t)$ tais que

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ f(t) & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

Consideremos agora em vez da função $f(t)$, a função

$$e^{-st} \cdot f(t) \quad (8)$$

em que $x > 0$, e formemos o integral

$$F(x, \omega) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (9)$$

Atendendo ao decrescimento de e^{-st} quando $t \rightarrow \infty$, este integral convergirá ainda que $f(t) = e^{j\omega t} \cdot \psi(t)$ com $\psi(t)$ limitada, pois que poderemos sempre escolher $x > \alpha$.

Considerando a função $e^{-st} \cdot f(t)$ em (5), teremos:

$$e^{-st} \cdot f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, \omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \begin{cases} e^{-st} \cdot f(t) & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad (10)$$

Fazendo $s = x + j\omega$ e $F(s) = F(x, \omega)$ em (9) e (10) virá:

$$F(s) = F(x, \omega) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt \quad (11)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} e^{st} \cdot F(s) \cdot ds \quad (12)$$

A função $F(s)$ (*função imagem*) obtida a partir de $f(t)$ (*função original*) pela expressão (11) chama-se *transformada de Laplace* da função $f(t)$, e a operação segundo a qual se obtém $F(s)$ a partir de $f(t)$ chama-se *transformação de Laplace*, à qual corresponde a notação $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ ⁷. Vemos pois que a transformada de LAPLACE de uma função $f(t)$ é afinal o espectro segundo FOURIER da função $e^{-st} \cdot f(t)$ em que $x > 0$. Notemos porém, que enquanto na transformada de Fourier a amplitude da frequência ω_1 , contida em $f(t)$ era dada por $F(\omega_1)$, na transformada de LAPLACE a amplitude da frequência ω_1 , contida em $e^{-st} \cdot f(t)$ vem dada pelo módulo de $F(s)$ para $\omega = \omega_1$ e $x = x_1$. Vemos que para $x > 0$ esta amplitude é função do tempo. Num caso em que possamos fazer tender x para 0 sem fazer perigar a convergência do integral (11), cairemos na transformada de FOURIER e, determinando a imagem de $f(t)$, teremos determinado o seu espectro segundo FOURIER.

Vejamus uma aplicação.

Determinar a transformada de LAPLACE da função:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad (\text{função de Heaviside})$$

Temos

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (\text{supondo : parte real de } s > 0)$$

A função $f(t)$ terá como função imagem a função $\frac{1}{s}$.

Nestas condições para uma frequência $\omega = \omega_1$ e $x = x_1$ a componente correspondente viria dada por:

$$e^{st} \cdot \frac{1}{s} = e^{x_1 t} \cdot e^{j\omega_1 t} \cdot \frac{1}{x_1 + j\omega_1} = e^{x_1 t} \cdot r^{-1} \cdot e^{-j\varphi_1} \cdot e^{j\omega_1 t} = k \cdot e^{x_1 t} \cdot e^{j(\omega_1 t - \varphi_1)}$$

Esta componente não é uma oscilação sinusoidal pura.

A este propósito e atendendo à frequente utilização da função de Heaviside em problemas de controle, seria talvez interessante notar que ela não possui em rigor espectro segundo Fourier.

Com efeito, se em

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} e^{st} \cdot \frac{1}{s} \cdot ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x+j\omega)t} \cdot \frac{1}{x+j\omega} \cdot d(x+j\omega)$$

fizemos $x = 0$, obteremos o integral:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \cdot \frac{d\omega}{\omega}$$

⁷ Para a operação inversa da transformação de LAPLACE, isto é, para a operação segundo a qual se obtém $f(t)$ a partir de $F(s)$, usa-se a notação $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

No texto convencionaremos o uso de letras maiúsculas para a função imagem e minúsculas para a função original.

que diverge pois que

$$\left[\frac{1}{\omega} \right]_{\omega=0} = \infty$$

Esta dificuldade costuma tornar-se interrompendo o eixo $j\omega$ por uma semicircunferência com centro na origem ($x = 0$, $\omega = 0$), e cujo raio se faz tender para zero. O integral que assim se obtém não é pois rigorosamente o integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \cdot \frac{d\omega}{\omega}, \text{ mas sim}$$

$$\frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} e^{j\omega t} \frac{d\omega}{\omega} + \int_{\epsilon}^{+\infty} e^{j\omega t} \frac{d\omega}{\omega} + \int_{+\epsilon}^{+\infty} e^{j\omega t} \frac{d\omega}{\omega} \right]$$

2.3 PROPRIEDADES DA TRANSFORMAÇÃO DE LAPLACE

Enunciaremos neste capítulo algumas das propriedades mais importantes da transformação de Laplace, cuja aplicação em problemas de controle é muitas vezes oportuna.

a) Adição

Sendo $F_1(s)$ e $F_2(s)$ respectivamente funções imagem de $f_1(t)$ e $f_2(t)$ teremos:

$$\mathcal{L} [f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L} [f_1(t)] + \mathcal{L} [f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$$

b) Derivação nas funções originais

Se $f(t)$ possui derivadas até à ordem n , se $f'(t)$, $f''(t)$... $f^{(n-1)}(t)$ não crescem mais depressa que uma função exponencial e^{at} , quando t tende para infinito e se além disso $f'(t)$, $f''(t)$... $f^{(n-1)}(t)$ possuem limites quando t tende para zero, então será válida a expressão

$$\mathcal{L} [f^{(n)}(t)] = F(s) \cdot s^n - f(0) \cdot s^{n-1} - f'(0) \cdot s^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

em que $F(s)$ é função imagem de $f(t)$.

No caso particular de ser $n = 1$, teremos pois:

$$\mathcal{L} [f'(t)] = F(s) \cdot s - f(0)$$

c) Integração nas funções originais

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t) \cdot dt \right] = \frac{\mathcal{L} [f(t)]}{s}$$

d) Derivação nas funções imagem

Sendo $F(s)$ função imagem de $f(t)$ teremos:

$$- \frac{d}{ds} F(s) = \mathcal{L} [t \cdot f(t)]$$

e) Integração nas funções imagem

Sendo $F(s)$ função imagem de $f(t)$ teremos:

$$\int_0^{\infty} F(s) \cdot ds = \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right]$$

f) Integral de convolução (Teorema de Duhamel)

Sendo $F_1(s)$ e $F_2(s)$ funções imagem respectivamente de $f_1(t)$ e $f_2(t)$ teremos:

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) dt \right] = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Chamando produto de convolução de $f_1(t)$ e $f_2(t)$ a

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) \cdot dt = f_2(t) * f_1(t)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [f_1(t) * f_2(t)] &= F_1(s) \cdot F_2(s) = F_2(s) \cdot F_1(s) = \\ &= \mathcal{L} [f_2(t) * f_1(t)] \end{aligned}$$

g) Translação nas funções imagem

Sendo $F(s)$ imagem de $f(t)$ e a uma constante teremos:

$$F(s + a) = \mathcal{L} [e^{-at} f(t)]$$

h) Limites

h. 1) Toda a função imagem tende para zero quando s tende para infinito através de valores reais, ou segundo uma linha situada no primeiro ou quarto quadrantes do plano complexo.

Note-se que esta proposição não é suficiente, isto é, uma função $F(s)$ que tenda para zero nas condições indicadas pode não ser imagem de nenhuma função.

A função e^{-s} por exemplo não é imagem de nenhuma função e satisfaz às condições enunciadas.

h. 2) Se $\lim_{t \rightarrow 0} y(t)$ existe, então será:

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s Y(s)$$

h. 3) Se $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ existe, então será:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s)$$

Antes de fechar este capítulo chamaremos a atenção para a propriedade *b*. Vemos que a derivação n vezes da função original $f(t)$ corresponde na função imagem $F(s)$ a uma multiplicação por s^n , isto, a menos da expressão $-f(0) \cdot s^{n-1} - f'(0) \cdot s^{n-2} \dots - f^{(n-1)}(0)$. Vamos aproveitar esta propriedade na resolução de equações diferenciais, o que nos permitirá passar duma equação diferencial original em $f(t)$, $f'(t)$... etc., para uma equação algébrica que poderemos resolver em ordem a $F(s)$. Uma vez conhecida a função $F(s)$, para determinar $f(t)$ não teremos mais que determinar a função original de $F(s)$.

Um reparo que se poderia fazer a este método é a obtenção na expressão de $F(s)$ das condições iniciais $f(0)$, $f'(0)$, ... etc., todas referidas ao tempo t igual a zero. Todavia sendo nos problemas de controle as condições iniciais dadas para $t = 0$, esta característica só vem facilitar a resolução desses problemas.

2.4 FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

No sentido de mostrar o significado das *funções de transferência* e a vantagem da sua utilização, vamos recorrer a um exemplo simples em que faremos uso da transformação de LAPLACE.

Consideremos o sistema indicado na figura 6 e suponhamos que o ponto A foi submetido a uma elongação $y(t)$ da forma

$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

O problema que se põe é o de determinar a elongação $x(t)$ do ponto B correspondente à excitação $y(t)$ à entrada. Vamos pois determinar a *resposta do sistema* (ou *grandeza de saída do sistema*) correspondente à *grandeza de entrada* $y(t)$.

Estabeleçamos em primeiro lugar a equação diferencial que relaciona as nossas duas grandezas.

Considerando as expressões:

$$\text{Força actuante} = K [y(t) - x(t)]$$

$$\text{Resistência de viscosidade} = -V \cdot \frac{dx(t)}{dt}$$

teremos:

$$K [y(t) - x(t)] - V \frac{dx(t)}{dt} = 0$$

ou:

$$y(t) = \frac{V}{K} \cdot \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

Passando agora para a equação imagem teremos:

$$Y(s) = \frac{V}{K} X(s) \cdot s + X(s) - \frac{V}{K} x(0)$$

Como no nosso caso é:

$$x(0) = 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{s}$$

teremos:

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{1}{1 + \frac{V}{K} \cdot s} = F(s)$$

e

$$X(s) = F(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{\frac{K}{V}}{s \left(\frac{K}{V} + s \right)}$$

Para passar para a função original decomponemos em primeiro lugar $X(s)$ numa soma de fracções simples⁸. Virá:

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{K}{V}}$$

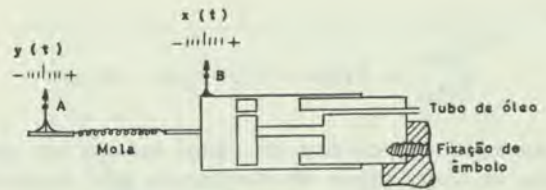


Fig. 6

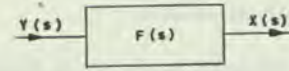


Fig. 7

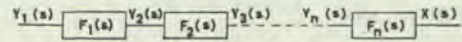


Fig. 8

Passando para a função original teremos:

$$x(t) = 1 - e^{-\frac{K}{V} t}$$

Como vimos para determinar a resposta do sistema a uma grandeza de entrada, cuja imagem era $Y(s)$, não tivemos mais que multiplicar $F(s)$, função associada ao sistema, pela imagem da função $y(t)$ e determinar a função original de $Y(s) \cdot F(s) = X(s)$.

Estamos pois em condições de reconhecer a vantagem na utilização de funções associadas a sistemas, pois que, conhecida tal função para um sistema, estamos aptos a determinar a sua resposta a uma grandeza de entrada qualquer, através da transformação de LAPLACE. À função $F(s)$ chamaremos função de transferência de um sistema, podendo-o então representar da forma indicada na fig. 7, em que, como vemos, as grandezas de entrada e de saída não são funções do tempo, mas sim imagens das funções do tempo correspondentes.

Esta representação, esboçada já anteriormente, costuma designar-se por *representação bloco* e a sua aplicação introduz uma simplificação notável no estudo de circuitos de controle, particularmente quando estes são complicados.

2.5 COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

Tal como nos circuitos eléctricos em que se podem em certos casos substituir impedâncias localizadas⁹ por uma impedância equivalente para facilidade de estudo, também em circuitos de regulação se podem por vezes substituir funções de transferência localizadas, por uma função de transferência equivalente.

Vejamos os casos que se podem apresentar.

a) Sistemas ligados em série

Consideremos os sistemas de fig. 8, de funções de transferência $F_1(s)$, $F_2(s)$, $F_3(s)$.. $F_n(s)$. Tendo em conta que

$$\frac{Y_2(s)}{Y_1(s)} = F_1(s); \quad \frac{Y_3(s)}{Y_2(s)} = F_2(s) \dots \frac{X(s)}{Y_n(s)} = F_n(s)$$

⁸ Esta decomposição, que no exemplo considerado é de fácil verificação, pode fazer-se recorrendo aos resíduos de $X(s)$. Efectivamente o resíduo de uma função $F(s)$ para $s = s_i$ é igual a $\lim (s - s_i) F(s)$.

⁹ Notar que as impedâncias são também funções de transferência.

virá:

$$\frac{X(s)}{Y_1(s)} = F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s) \dots F_n(s)$$

Vemos assim que no caso de vários sistemas em série a função de transferência do conjunto é igual ao produto das funções de transferência de cada um deles.

b) *Sistemas ligados em paralelo*

Consideremos os sistemas da fig. 9, de funções de transferência $F_1(s)$, $F_2(s)$, $F_3(s)$... $F_n(s)$.

Tendo presente que

$$F_1(s) = \frac{X_1(s)}{Y(s)} ; F_2(s) = \frac{X_2(s)}{Y(s)} \dots F_n(s) = \frac{X_n(s)}{Y(s)}$$

virá

$$\begin{aligned} \frac{X(s)}{Y(s)} &= \frac{X_1(s) + X_2(s) + \dots + X_n(s)}{Y(s)} = \\ &= F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s) \end{aligned}$$

Neste caso a função de transferência equivalente é igual à soma das funções de transferência de cada sistema parcelar.

c) *Sistema com realimentação*

Consideremos em primeiro lugar um caso simples representado na fig. 10, em que um sistema $G(s)$ é realimentado, através de um outro sistema $H(s)$.

No ponto S, realiza-se uma ramificação, de modo que a grandeza de saída de $G(s)$ seja integralmente transmitida à entrada de $H(s)$. O ponto S é pois um puro nó de distribuição. No ponto P convergem duas grandezas $Y(s)$ e $X(s) \cdot H(s)$, cuja soma algébrica (em que as parcelas tomam os sinais que se indicam sempre nos ramos respectivos) é enviada para a entrada de $G(s)$.

Vemos que nestas condições e atendendo à fig. 10

$$X(s) = [Y(s) - X(s) \cdot H(s)] G(s)$$

ou:

$$X(s) = Y(s) \cdot G(s) - X(s) \cdot H(s) \cdot G(s)$$

ou ainda:

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)} = F(s)$$

Poderemos pois dizer que a realimentação de um sistema $G(s)$ através de um outro sistema $H(s)$, corresponde a dividir a sua função de transferência $G(s)$ por $1 \pm G(s) \cdot H(s)$ a que se chamará *factor de realimentação*. O sinal + ou - corresponde respectivamente a uma realimentação negativa (como foi o nosso caso) ou positiva.

No caso de ser $H(s) = 1$ (acoplamento rígido) teremos que o factor de realimentação será $1 \pm G(s)$.

d) *Sistemas alimentados por várias grandezas*

Vamos agora considerar o caso geral de sistemas alimentados por várias grandezas, da forma indicada na fig. 11.

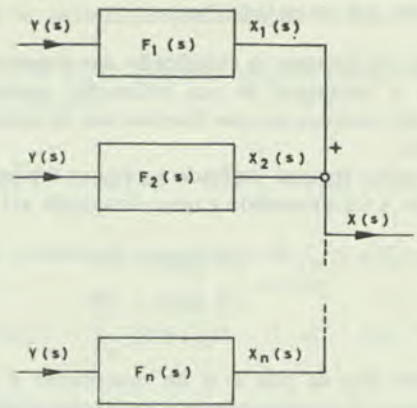


Fig. 9

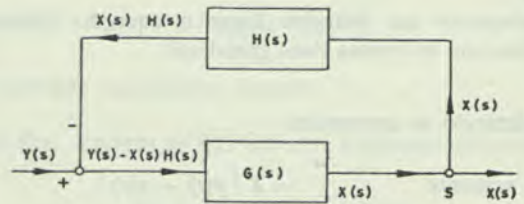


Fig. 10

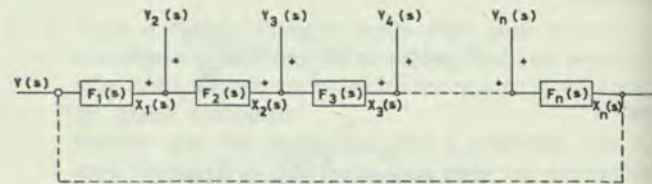


Fig. 11

Fazendo:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= F_1(s) \cdot F_2(s) \dots F_n(s) \\ \mu_2 &= F_2(s) \dots F_n(s) \\ &\dots \dots \dots \\ \mu_i &= F_i(s) \dots F_n(s) \\ \mu_n &= F_n(s) \end{aligned}$$

Virá na ausência de realimentação

$$\begin{aligned} X_n(s) &= F_n(s) [Y_n(s) + F_{n-1}(s) (Y_{n-1}(s) + \dots)] = \\ &= \mu_1 Y_1(s) + \mu_2 Y_2(s) + \dots \mu_n Y_n(s) \end{aligned}$$

Realimentando o sistema da forma indicada (realimentação positiva) virá:

$$X_n(s) = \frac{\sum \mu_i Y_i(s)}{1 - G(s)}$$

em que

$$G(s) = F_1(s) \cdot F_2(s) \dots F_n(s)$$

Vemos pois que uma realimentação positiva de $X_n(s)$ em $Y_1(s)$ corresponde à divisão de $\sum \mu_i Y_i(s)$ por $1 - G(s)$.

2.6 CARACTERÍSTICA DE FREQUÊNCIA. SUA REPRESENTAÇÃO VECTORIAL E SEU SIGNIFICADO

Vimos anteriormente como determinar as equações de comportamento de um sistema, mencionámos um processo de as resolver recorrendo à transformação de LAPLACE e estudámos também as funções de transferência de sistemas e suas combinações. As nossas considerações têm sido, até agora, dirigidas no sentido do estudo de estados transitórios de sistemas, mediante a análise desses estados. Ora, por conveniência dos métodos de ataque dos problema de estabilidade e também por facilidades de execução de ensaios com vista a análise do sistema, o que sucede em geral é que os sistemas são estudados em estados permanentes e do seu comportamento em estados permanentes é que se infere o seu comportamento em estados transitórios, que são os de mais interesse nos problemas de controle, como vimos. Os estados permanentes a que nos referimos obtêm-se estudando a resposta permanente de um sistema a uma oscilação sinusoidal da forma $r \cdot e^{j\omega t}$, para diversos valores da frequência. Verifica-se que essa resposta é também uma função sinusoidal com a mesma frequência da oscilação excitadora e com uma amplitude e um desfazamento em relação àquela que são funções dessa frequência. Marcando, em coordenadas polares, o cociente da resposta do nosso sistema pela oscilação excitadora sinusoidal correspondente, para as frequências desde 0 a ∞ , teremos a representação vectorial da chamada característica de frequência do sistema (fig. 12) que será pois uma função da forma:

$$A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = G(\omega)$$

Vejam os que relação existe entre esta função $G(\omega)$ e a função de transferência que estudámos.

Comparemos no quadro seguinte a modificação que sofrem os termos da grandeza de saída, que figuram na equação do sistema quando substituímos $x(t)$ pela solução permanente $r \cdot G(\omega) e^{j\omega t}$ e quando passamos das funções originais para as funções imagem na referida equação do sistema.

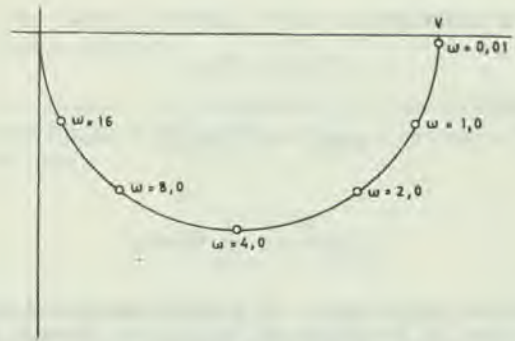
Substituindo $x(t)$ por $r \cdot G(\omega) e^{j\omega t}$ e $y(t)$ por $r \cdot e^{j\omega t}$ teremos:

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow r \cdot G(\omega) \cdot e^{j\omega t} \\ x'(t) &\rightarrow j\omega \cdot x(t) \\ x''(t) &\rightarrow j(\omega)^2 \cdot x(t) \\ &\dots \\ x^{(n)}(t) &\rightarrow (j\omega)^n \cdot x(t) \\ y(t) &\rightarrow r \cdot e^{j\omega t} \\ y'(t) &\rightarrow j\omega \cdot y(t) \\ y''(t) &\rightarrow (j\omega)^2 \cdot y(t) \\ &\dots \\ y^{(m)}(t) &\rightarrow (j\omega)^m \cdot y(t) \end{aligned}$$

Passando das funções originais para as funções imagem teremos:

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow X(s) \\ x'(t) &\rightarrow s \cdot X(s) \\ x''(t) &\rightarrow s^2 \cdot X(s) \\ &\dots \\ x^{(n)}(t) &\rightarrow s^n \cdot X(s) \\ y(t) &\rightarrow Y(s) \\ y'(t) &\rightarrow s \cdot Y(s) \\ y''(t) &\rightarrow s^2 \cdot Y(s) \\ &\dots \\ y^{(m)}(t) &\rightarrow s^m \cdot Y(s) \end{aligned}$$

Vemos que a característica de frequência do sistema $G(\omega)$ é representada por uma função igual à função de transferência $F(s)$ para $s = j\omega$.



Representação vectorial de $\frac{V}{1 + j\omega T}$ (ω em rad/s)

Fig. 12

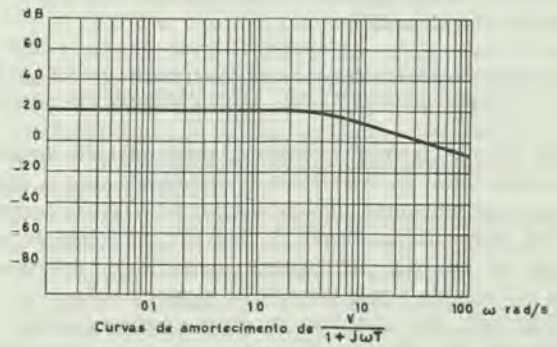
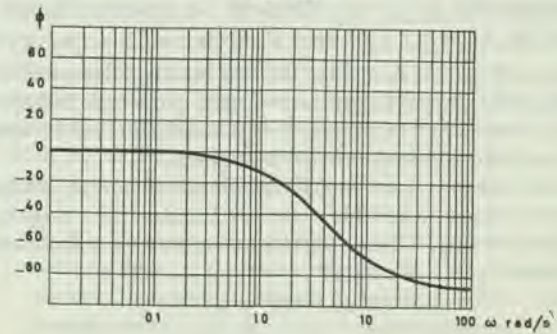


Fig. 13a



Curvas de fase de $\frac{V}{1 + j\omega T}$

Fig. 13b

Este resultado mostra-nos que a característica de frequência de um sistema, da qual até agora tínhamos uma noção somente experimental, se pode identificar, para $s = j\omega$, com o conceito função de transferência, ao qual chegámos anteriormente por via puramente teórica, tendo-nos referido então às vantagens da sua introdução em problemas de controle.

Podemos ainda dar mais um passo na ilustração do significado da característica de frequência.

Na realidade, se considerarmos a resposta de um sistema $F(s)$ a uma função de Heaviside (imagem $\frac{1}{s}$) a imagem da sua resposta será:

$$X(s) = \frac{F(s)}{s}$$

Se em $s = \delta + j\omega$ fizermos $\delta = 0$, virá

$$X(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

Todavia vimos que

$$F(j\omega) = G(\omega)$$

e portanto

$$G(\omega) = j\omega \cdot X(j\omega)$$

ou

$$X(j\omega) = -\frac{j}{\omega} G(\omega)$$

Lembrando que ao fazer $\delta = 0$, a transformação de LAPLACE se converte em transformação de FOURIER, diremos ainda acerca da característica de frequência de um sistema que o seu produto por $-\frac{j}{\omega}$ representa o espectro de Fourier da resposta desse sistema a uma excitação com a forma da função de Heaviside.

2.7 REPRESENTAÇÃO DA CARACTERÍSTICA DE FREQUÊNCIA SEGUNDO CURVAS DE AMORTECIMENTO E FASE

Depois de nos termos referido à representação vectorial da característica da frequência e atendendo que a representação segundo curvas de amortecimento e fase se encontra bastante generalizada e serve de base a um critério de estabilidade de que nos ocuparemos mais tarde, referir-nos-emos em seguida a este método de representação.

Considerando dois sistemas de eixos conforme a fig. 13, marcaremos nas abcissas de ambos em escala logarítmica as frequências ω e nas ordenadas os amortecimentos de amplitudes ($\log |G(\omega)|$) em decibels (dB) e os desvios de fase em graus. A análise das ordenadas correspondentes a uma dada frequência dar-nos-á pois para essa frequência qual o valor do amortecimento e do desvio de fase da oscilação excitadora relativamente à resposta.

Acrescentaremos que o ângulo ϕ , desvio de fase, se encontra algumas vezes substituído nas ordenadas pelo ângulo γ , margem de fase. Estes ângulos encontram-se relacionados segundo

$$\gamma = 180 + \phi$$

3 — Estabilidade

3.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS E CRITÉRIO DE NYQUIST

Vamos principiar por definir estabilidade em controle fazendo seguir algumas considerações sobre o comportamento de sistemas estáveis.

Diz-se que um sistema de função de transferência $F(s)$ é estável, quando esta não contém polos com parte real positiva no plano complexo.

Esta condição equivale a afirmar que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

em que $f(t)$ é a função original de $F(s)$. Efectivamente, como veremos, as funções de transferência que interessa considerar em sistemas, são funções racionais em que o grau do numerador é inferior ao do denominador.

Sendo assim é legítima a decomposição:

$$F(s) = \sum_i \sum_h \frac{A_{ih}}{(s-\alpha_i)^h}$$

Ora

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-\alpha_i)^h} \right] = \frac{1}{(h-1)!} e^{\alpha_i t} t^{h-1}$$

donde

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \sum_i \sum_h \frac{A_{ih}}{(h-1)!} e^{\alpha_i t} t^{h-1}$$

e

$$|f(t)| = \sum_i \sum_h \frac{A_{ih}}{(h-1)!} e^{R_e(\alpha_i) \cdot t} t^{h-1}$$

em que $R_e(\alpha_i)$ representa a parte real de α_i .

Se $R_e(\alpha_i) < 0$ teremos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

como tínhamos dito.

Se uma grandeza $y(t)$, convergente¹⁰, como é o caso das grandezas físicas, actuar num sistema estável de função de transferência $F(s)$, a resposta $x(t)$ do nosso sistema a $y(t)$ será convergente.

Formulamos assim em termos matemáticos as condições a que deve satisfazer um sistema para que, quando submetido a uma perturbação ou variação de grandeza de referências, não motive uma resposta divergente constituída por oscilações de amplitude crescente ou por uma exponencial crescente. Fizemos já sentir no princípio desta exposição, a possibilidade de tais fenómenos ocorrerem, designando os circuitos de controle que possam ser sede de tais fenómenos por circuitos de controle instáveis. Fizemos então referência à necessidade de estudar as condições de estabilidade de um sistema. Efectivamente um sistema instável não tem utilização prática.

Com este passo que demos, definindo sistema estável, o nosso problema reduzir-se-á a estudar as condições para que uma função $F(s)$ não contenha polos na parte positiva do plano complexo. Neste sentido vamos principiar por enunciar um importante teorema devido a Cauchy.

Considerando uma função de variável complexa $w = f(z)$, analítica e uniforme no interior e sobre um contorno A , excepto num número finito de polos, se o afixo de z percorrer uma vez no sentido directo o referido contorno no plano dos z (fig. 14 a), a imagem desse ponto no plano dos w (fig. 14 b) descreverá um número de rotações em torno da origem, no mesmo sentido do percurso do contorno A , igual ao número de zeros menos o número de polos de w , existentes no interior de A .

Na aplicação deste teorema ao nosso problema vamos considerar dois casos:

- O sistema é constituído por componentes de funções de transferência $F_1(s), F_2(s), F_3(s) \dots F_n(s)$, ligadas em série e sem realimentação;
- O sistema de função de transferência $G(s)$ é realimentado através de uma função de transferência $H(s)$.

a) Neste caso, a análise directa da função $F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s) \cdot F_3(s) \dots F_n(s)$, dir-nos-á se o sistema é estável ou não. Para isso teremos porém que determinar por

¹⁰ Notar que a convergência de $y(t)$ está associada à ausência de polos com parte real positiva em $Y(s)$. Faremos sempre esta hipótese para as funções do tempo que representam grandezas dadas num problema.

qualquer processo o número de raízes de $F(s)$ com parte real positiva. Uma vez conhecido o número destas, o número de polos com parte real positiva virá dado pela aplicação do nosso teorema à parte positiva do plano dos z , dispensando-nos porém de determinar a imagem do percurso da semi-circun-

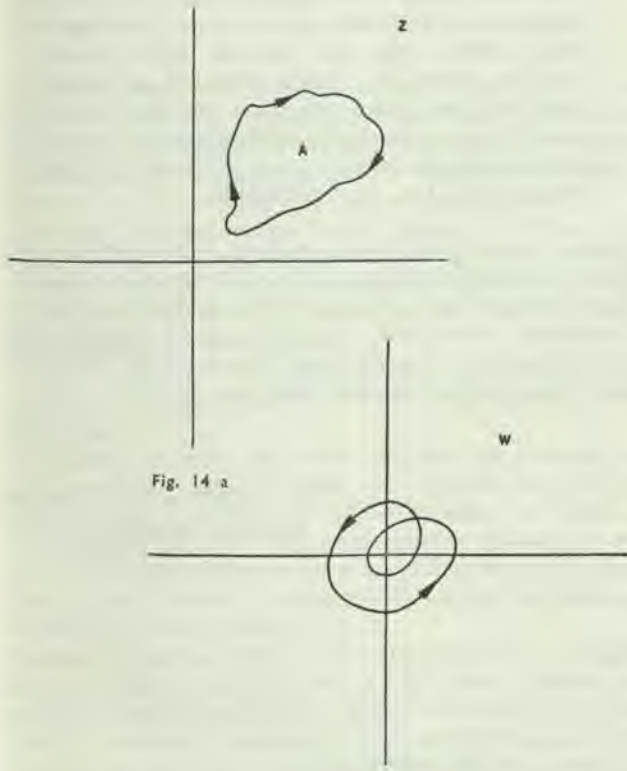


Fig. 14 b

ferência do raio infinito assim como a imagem do semi-eixo de $-j\infty$ até 0. Na realidade, sendo $F(s)$ imagem de uma função $f(t)$, segundo uma transformação de LAPLACE, pela propriedade h. 1 mencionada em 2.3, o grau do seu numerador não pode ser maior do que o grau do seu denominador. Daqui podemos concluir que $F(+j\infty) = F(-j\infty)$.

Este resultado aliás era de esperar pois que nos sistemas físicos de que dispomos são sempre de esperar perdas, efeitos de indutância¹¹ em série e efeitos de capacidade¹¹ em paralelo, que fazem que a transmissão das frequências que tendem para infinito se não faça de todo, ou conduza quando muito a respostas finitas.

Tendo presente esta conclusão e visto que os coeficientes que figuram em $F(s)$ são reais, a curva $F(s)$ é simétrica da curva $F(s)$ relativamente ao eixo dos reais e pode portanto ser obtida por simetria a partir daquela.

Deste modo podemos dizer que, uma vez determinada a característica de frequência de um sistema $F(s)$, nas condições indicadas em a, e constituída por simetria a curva $F(s)$, supondo também conhecido o número de zeros N da função $F(s)$, na parte positiva do plano dos z_0 ,

O afixo de $F(s)$ deslocando-se no sentido das frequências crescentes terá que descrever N rotações no sentido dos ponteiros do relógio, em torno da origem do plano dos w , para que o sistema seja estável.

Observadas as hipóteses feitas, esta condição é necessária e suficiente.

- b) Um sistema $G(s)$ realimentado através de $H(s)$ tem uma função de transferência, como a seu tempo vimos, da forma

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}^{12}$$

Neste caso, que poderia ser tratado também da mesma forma que o anterior pela análise directa de $F(s)$, há vantagens de natureza analítica em procurar julgar da estabilidade do sistema realimentado a partir da análise da função $G(s) \cdot H(s)$. Ora a função de transferência de um sistema realimentado, interrompido em σ (fig. 15) é $G(s) \cdot H(s)$. Poderemos então dizer que o estudo da estabilidade de um sistema realimentado se pode reduzir ao estudo do mesmo sistema em circuito aberto, o que, além das vantagens analíticas mencionadas tem ainda vantagens provenientes da maior facilidade de obtenção experimental das características de frequência.

No método utilizado no caso anterior, pressupúnhamos o conhecimento das raízes de parte real positiva de $F(s)$; neste caso consideram-se conhecidos o número de pontos instáveis de $G(s)$, e o número de pontos instáveis de $H(s)$, isto é, os números de polos de parte real positiva de $G(s)$ e $H(s)$.

Se $G(s)$ tem polos de parte real positiva, a condição para que o sistema associado $F(s)$ seja estável, é que esses polos se mantenham em $1 + G(s) \cdot H(s)$ com ordem igual ou superior e que $1 + G(s) \cdot H(s)$ não contenha nenhum zero de parte real positiva¹³.

Esta condição, pelo teorema de CAUCHY que enunciaremos, permite-nos afirmar que,

se $G(s)$ tem P polos e $H(s)$ tem P' polos de parte real positiva, o sistema realimentado será estável se a característica de frequência da função $1 + G(s) \cdot H(s)$, quando percorrido de $-j\infty + a$ a $+j\infty$ descrever $P + P'$ rotações em torno da origem, no sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio.

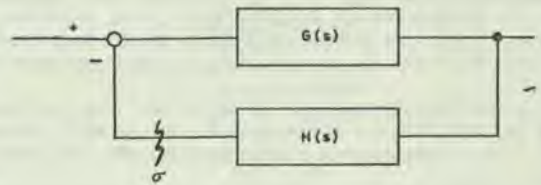


Fig. 15

Efectivamente se o número de rotações for diferente de $P + P'$ (e portanto menor) ou há no semiplano da direita polos de $G(s)$ que não existem em $1 + G(s) \cdot H(s)$, ou zeros de $1 + G(s) \cdot H(s)$ que não existem em $G(s)$,

¹¹ As designações «indutância» e «capacidade» empregam-se aqui no sentido geral.

¹² Salvo outra indicação consideraremos sempre no futuro a realimentação negativa, nos sistemas realimentados.

¹³ A possibilidade de zeros de $1 + G(s) \cdot H(s)$ se eliminarem com zeros de $G(s)$ é de excluir. Efectivamente, se α é um zero de $1 + G(s) \cdot H(s)$, ressaltando o caso de α ser polo de $H(s)$, não pode ser zero de $G(s)$.

e, em qualquer destes casos, o sistema associado a $F(s)$ é instável.

Por uma mudança de eixos podemos trocar neste enunciado a função $1+G(s) \cdot H(s)$ por $G(s) \cdot H(s)$ e considerar as rotações em torno do ponto $-1+j.0$, em vez da origem, e assim teremos o enunciado na sua forma mais frequente, que será:

Se $G(s)$ tem P polos e $H(s)$ tem P' polos de parte real positiva, o sistema realimentado será estável se a característica de frequência da função $G(s) \cdot H(s)$, quando percorrida de $-j\infty$ a $+j\infty$ descrever $P+P'$ rotações em torno do ponto $-1+j.0$, no sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio.

Esta condição, também necessária e suficiente, é conhecida pela designação de *critério de Nyquist generalizado*. O critério de NYQUIST na sua forma inicial fazia a hipótese de $G(s)$ e $H(s)$ não conterem soluções instáveis. Nestas condições o critério de estabilidade obrigava a que a característica de $G(s) \cdot H(s)$ percorrida no sentido crescente das frequências, não descrevesse nenhuma rotação no sentido dos ponteiros do relógio em torno do ponto $-1+j.0$.

O caso da característica de frequência de $G(s) \cdot H(s)$ passar pelo ponto $-1+j.0$ correspondente ao estabelecimento de oscilações de amplitudes permanente

no sistema realimentado. Se bem que alguns autores designem os sistemas, onde tal sucede, por sistemas *condicionalmente estáveis*, adoptaremos aqui uma nomenclatura mais pessimista designando-os por *instáveis*. O critério de NYQUIST toma na maior parte das vezes esta forma, pois que o caso de sistemas com a realimentação cortada não serem estáveis, é de excepção. Finalmente numa breve crítica ao critério de NYQUIST desejaríamos mencionar que embora de uma aplicação muito prática, pois que permite, inclusivamente, a partir de dados de sistemas parcelares, julgar do sistema total, ele apenas nos diz se um determinado sistema é ou não estável, não definindo nenhuma grandeza que nos permita saber «a que distância» estamos da instabilidade (ou da estabilidade).

Além do critério de NYQUIST existem outros métodos para julgar da estabilidade de um sistema. Desses outros escolhemos o método de EVANS e o método de BODE de que nos ocuparemos em seguida, para figurar nesta exposição por nos parecerem ser os de mais interesse e de ocorrência mais frequente na literatura sobre este assunto.

(Continua)

MÁRIO TRIGO TRINDADE

Engenheiro Electrotécnico (U.P.)

ESCRITA DOS NÚMEROS QUANDO REPRESENTATIVOS DE VALORES EM ESCUDOS *

Decreto-Lei nº 42 899

A 9ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, reunida em Sèvres em 1948, resolveu por unanimidade aconselhar que na escrita dos números se suprimissem os pontos e os dois pontos, pelas confusões possíveis que estes sinais gráficos podem acarretar.

A norma definitiva portuguesa NP-9, mandada já seguir obrigatoriamente nos estabelecimentos de ensino e nos livros didácticos pela Portaria nº 17 053, de 4 de Março de 1959, do Ministério da Educação Nacional, veio adoptar os princípios seguidos pela Conferência Geral atrás citada.

Como excepção às regras daquela norma, e por força do disposto nos §§ 2º e 3º do artigo 4º da Lei de 21 de Junho de 1913, mantém-se apenas a escrita dos números quando representativos de valores em escudos.

Nada parece aconselhar que se mantenham aquelas disposições, antes pelo contrário a introdução das modernas máquinas de calcular e de contabilidade aconselha que se sigam os princípios adoptados na norma já citada.

Nestes termos:

Usando da faculdade conferida pela 1ª parte do nº 2º do artigo 109º da Constituição, o Governo decreta e eu promulgo, para valer como lei, o seguinte:

Artigo único. Os §§ 2º e 3º do artigo 4º da Lei de 21 de Junho de 1913 passam a ter a seguinte redacção:

§ 2º Os milhares de escudos poderão também designar-se por «contos» desde que a esta palavra se não acrescente qualquer outra restritiva; os milhões de escudos poderão também designar-se por «mil contos»; § 3º Na escrita dos valores os grupos de três algarismos devem ser separados por um espaço igual ao ocupado por qualquer algarismo no caso de escrita dactilográfica ou manuscrita e um pouco menor no caso de impressão.

Publique-se e cumpra-se como nele se contém.

Paços do Governo da República, 4 de Abril de 1960. — AMÉRICO DEUS RODRIGUES THOMAZ — António de Oliveira Salazar — Pedro Theotónio Pereira — Júlio Carlos Alves Dias Botelho Moniz — Arnaldo Schulz — João de Matos Antunes Varela — António Manuel Pinto Barbosa — Afonso Magalhães de Almeida Fernandes — Fernando Quintanilha Mendonça Dias — Marcello Gonçalves Nunes Duarte Mathias — Eduardo de Arantes e Oliveira — Vasco Lopes Alves — Francisco de Paula Leite Pinto — José do Nascimento Ferreira Dias Júnior — Carlos Gomes da Silva Ribeiro — Henrique Veiga de Macedo — Henrique de Miranda Vasconcelos Martins de Carvalho.

(Publicado no Diário do Governo nº 78, 1 série, de 4-4-960).

* Ver número 12 da *Electricidade*.