

INTRODUÇÃO À TEORIA DO CONTROLE *

3.2 MÉTODO DE EVANS

O método de EVANS é mais eloquente ao julgar da estabilidade de um sistema, assim como de outras características do controle, que o critério de NYQUIST.

Neste método visa-se o estudo das influências exercidas separadamente nas raízes da equação:

$$G(s) \cdot H(s) + 1 = 0 \quad (1)$$

por características do sistema correspondente ou seus elementos.

Principiaremos por definir *ganho* numa função $F(s)$.

Seja $F(s) = \frac{\psi(s)}{\varphi(s)}$ uma função racional fraccionária em que $\psi(s)$ e $\varphi(s)$ são polinómios respectivamente de grau m e n .

Nestas condições teremos:

$$F(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n s^{n-n'}}$$

ou:

$$F(s) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{s^m + \frac{b_1}{b_0} s^{m-1} + \dots + \frac{b_m}{b_0}}{s^n + \frac{a_1}{a_0} s^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{a_0} s^{n-n'}}$$

$$= \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{\prod_i (s - \beta_i)^{r_i}}{s^{n-n'} \prod_j (s - \alpha_j)^{t_j}}$$

Atendendo porém a que

$$\frac{b_m}{b_0} = \prod_i \beta_i^{r_i} (-1)^{\sum r_i} \quad \text{ou: } b_0 = \frac{b_m}{\prod_i \beta_i^{r_i} (-1)^{\sum r_i}}$$

$$\frac{a_n}{a_0} = \prod_j \alpha_j^{t_j} (-1)^{\sum t_j} \quad \text{ou: } a_0 = \frac{a_n}{\prod_j \alpha_j^{t_j} (-1)^{\sum t_j}}$$

teremos:

$$F(s) = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{\prod_i \alpha_j^{t_j} \cdot (-1)^{\sum t_j}}{\prod_i \beta_i^{r_i} \cdot (-1)^{\sum r_i}} \cdot \frac{\prod_i (z - \beta_i)^{r_i}}{\prod_j (z - \alpha_j)^{t_j}} \quad (2)$$

Fazendo

$$V = \frac{b_m}{a_n} \quad B = \prod_i (z - \beta_i)^{r_i} \quad (3)$$

$$M = \frac{\prod_j \alpha_j^{t_j} \cdot (-1)^{\sum t_j}}{\prod_i \beta_i^{r_i} \cdot (-1)^{\sum r_i}} \quad A = \prod_j (z - \alpha_j)^{t_j}$$

virá:

$$F(s) = V \cdot M \cdot \frac{B}{s^{n-n'} A} \quad (4)$$

À expressão V dá-se o nome de *ganho* da função (ou do sistema).¹⁴ Como resulta da definição, sendo $n - n' = p$ a multiplicidade do zero nulo de $\varphi(s)$, o ganho V virá:

$$V = \left[s^p \cdot F(s) \right]_{s=0}$$

Da análise das expressões (2), (3) e (4) concluiremos que a função $F(s)$ ficará perfeitamente determinada se forem dados os seus zeros e polos e o seu ganho.

No método de EVANS vai-se fazer uma aplicação desta conclusão, na equação (1).

Para isso principia-se por considerar os zeros e polos da função $G(s) \cdot H(s)$ no plano da variável imaginária s , estudando-se em seguida a variação das raízes da equação (1) nesse plano, para os diferentes valores do ganho da função $G(s) \cdot H(s)$.

O lugar geométrico dos pontos do plano s descrito pelos afixos das raízes da equação (1) quando se considera como parâmetro o ganho de $G(s) \cdot H(s)$ designa-se por *lugar das raízes* do sistema correspondente. Perante o *lugar das raízes* de um sistema, poder-se-á ver se a um dado ganho correspondem raízes de $1 + G(s) \cdot H(s) = 0$ (e portanto polos de $\frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$) com parte real positiva, nula ou negativa, isto é, se para um dado ganho o sistema é estável ou não.

Vejamos em primeiro lugar a que condições deve satisfazer o ponto $s = -\delta + j\omega$ do plano s para ser raiz da equação

$$G(s) \cdot H(s) = -1 \quad (5)$$

Representando por p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) os polos e por z_j ($j = 1, 2, \dots, m$) os zeros¹⁵ de $G(s) \cdot H(s)$, seja:

$$\begin{aligned} \arg. (s - p_i) &= \varphi_i \\ \arg. (s - z_j) &= \varphi_j \end{aligned}$$

As condições procuradas são:

$$\sum \varphi_i - \sum \varphi_j = 180 \pm k 360^\circ \quad (k \text{ inteiro}) \quad (6)$$

$$|G(s) \cdot H(s)| = 1 \quad (7)$$

* A publicação deste trabalho foi iniciada no n.º 17, e deve terminar no próximo número.

¹⁴ Embora a designação *ganho* se possa associar a $|s_p F(s)|$ para qualquer frequência, nesta exposição reservamo-la para a frequência zero.

¹⁵ Os polos ou zeros de multiplicidades respectivamente P e Z figurarão como P polos ou Z zeros simples.

Concretizemos num exemplo:

Seja:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{V}{T_a \cdot T_b \cdot \left(\frac{1}{T_a} + s\right) \cdot \left(\frac{1}{T_b} + s\right) \cdot s}$$

Considerando os vectores (fig. 16)

$$\begin{aligned} -\delta + j\omega - \left(-\frac{1}{T_a}\right) &= \left| \frac{1}{T_a} - \delta + j\omega \right| \varphi_1 \\ -\delta + j\omega - \left(-\frac{1}{T_b}\right) &= \left| \frac{1}{T_b} - \delta + j\omega \right| \varphi_2 \\ -\delta + j\omega &= \left| -\delta + j\omega \right| \varphi_3 \end{aligned}$$

As condições para que $-\delta + j\omega$ seja zero de $1 + G(s) \cdot H(s)$ reduzem-se aqui a

$$\sum \varphi_i = 180 \pm k \cdot 360 \quad (k \text{ inteiro}) \quad (6')$$

$$\left| \frac{V}{T_a \cdot T_b \cdot \left(\frac{1}{T_a} + s\right) \cdot \left(\frac{1}{T_b} + s\right) \cdot s} \right|_{s=-\delta+j\omega} = 1 \quad (7')$$

Se a condição (6') for satisfeita não teremos mais que determinar qual o valor de V que satisfaz a (7').

Num traçado do lugar das raízes é de aconselhar primeiramente a observação exclusiva de (6). Uma vez traçado este lugar geométrico satisfazendo a (6), não teremos mais que associar aos seus pontos os valores de V correspondentes, tirados de (7).

Enunciaremos em seguida algumas regras que facilitam um traçado por estimativa do lugar das raízes.

3.2.1 Regras para o traçado do lugar das raízes

a) Raízes para $V = 0$ e $V = \infty$
Dada a equação

$$G(s) \cdot H(s) = V \cdot M \cdot \frac{\prod_i (z - \beta_i)_{r_i}}{\prod_j (z - \alpha_j)_{l_j}} = -1$$

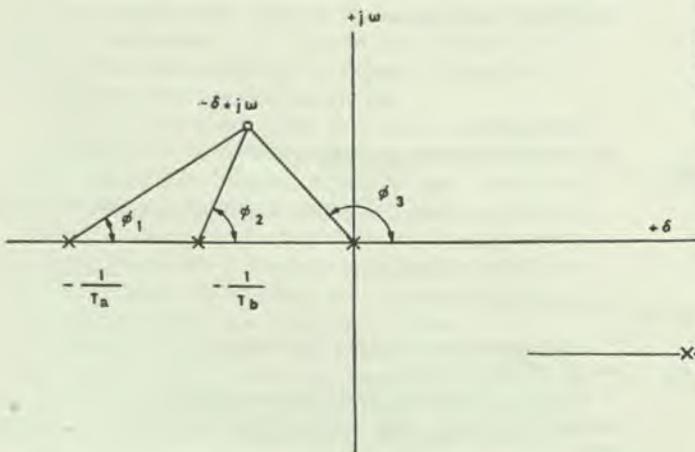


Fig. 16

para $V = 0$ as suas raízes serão os polos da expressão $G(s) \cdot H(s)$ e para $V = \infty$ as suas raízes serão os zeros desta mesma expressão.

b) Inclinação de assímtotas

Se definirmos um sentido de percurso de $V = 0$ para $V = \infty$ nos ramos do lugar das raízes, aquelas terão origem nos polos e extremidades nos zeros de $G(s) \cdot H(s)$. Atendendo a que $G(s) \cdot H(s)$ tem m zeros e n polos haverá $n - m$ ramos do lugar das raízes que tendem para pontos do infinito. Teremos pois que determinar $n - m$ assímtotas. A condição a observar para os argumentos dos raios vectores unindo uma raiz aos polos e zeros, é, como vimos

$$\sum_i^n \varphi_i - \sum_j^m \varphi_j' = 180 + k \cdot 360 \quad (k \text{ inteiro})$$

em que φ_i são os ângulos dos polos e φ_j' são os ângulos dos zeros.

No caso particular duma raiz $s = \infty$ teremos:

$$n \varphi - m \varphi = (n - m) \varphi = 180 + k \cdot 360 \quad (k \text{ inteiro})$$

ou:

$$\varphi = \frac{180 + k \cdot 360}{n - m} \quad (k \text{ inteiro})$$

c) Ponto de intercepção das assímtotas.

Por considerações tiradas da analogia existente entre a forma do lugar das raízes e as linhas de corrente no movimento, plano, permanente, dum líquido incompressível, onde os polos e zeros do lugar das raízes seriam substituídos respectivamente por fontes e sumidouros, poderíamos mostrar que as assímtotas do lugar das raízes se cortam num único ponto no eixo dos reais cuja abscissa é

$$\xi = \frac{\sum t_i \alpha_j - \sum r_i \beta_i}{n - m}$$

d) Determinação dos intervalos do lugar das raízes contidos no eixo real.

Sempre que existem zeros ou polos no eixo real, este contém intervalos do lugar das raízes. Estes intervalos são limitados por zeros ou polos.

Principiaremos por lembrar que os zeros ou polos complexos, são conjugados dois a dois por serem zeros de polinómio com coeficientes reais. Dispõem-se portanto, aos pares e simetricamente em relação ao eixo real.

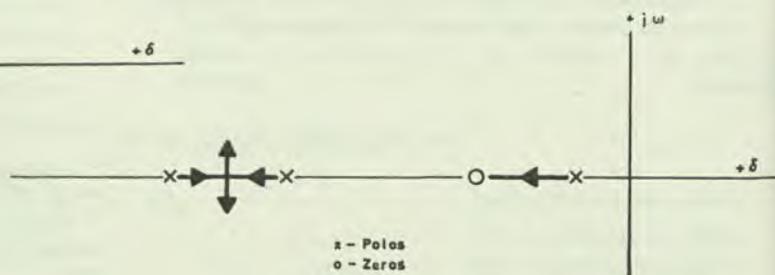


Fig. 17

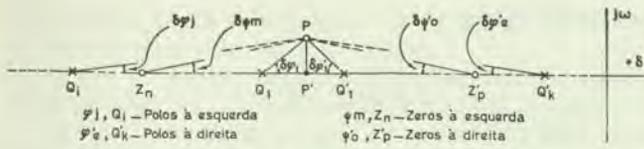


Fig. 18

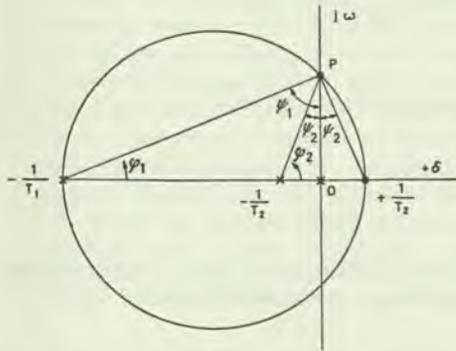


Fig. 19

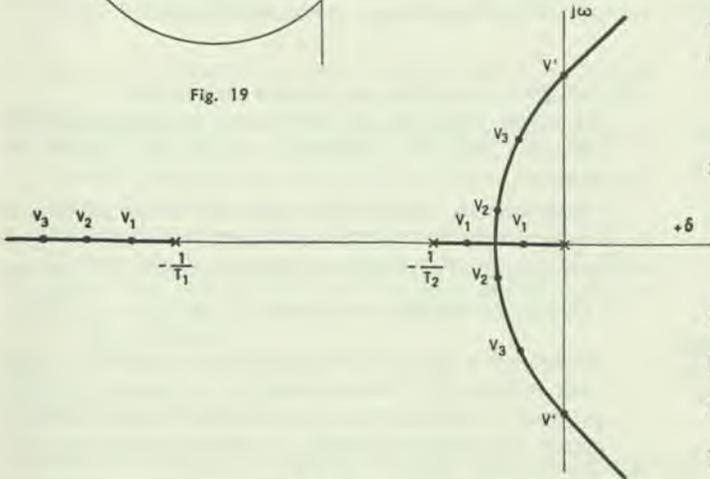


Fig. 20

Tendo agora presente que é nula a participação dos ângulos de polos ou zeros simetricamente colocados relativamente ao eixo real no somatório dos argumentos dos vectores irradiados por uma raiz situada no eixo real, a condição para que um segmento deste eixo entre dois polos, dois zeros ou um polo e um zero constitua um intervalo do lugar das raízes é que o número de polos menos o número de zeros sobre o eixo real à direita do segmento seja ímpar. Na realidade, os polos e zeros à esquerda dão argumentos iguais a zero, os polos à direita dão argumentos iguais a 180° e os zeros à direita dão argumentos iguais a -180° .

Quando estes intervalos do lugar das raízes são limitados por um polo e um zero temos um ramo completo do lugar das raízes. Quando são limitados por dois zeros ou dois polos temos respectivamente dois intervalos finais ou iniciais de dois ramos (fig. 17).

Neste último caso teremos o problema de determinar o ponto em que ambos os ramos abandonam o eixo real, problema do qual nos ocuparemos em seguida.

e) Determinação do ponto em que dois ramos do lugar das raízes, com início ou extremidade em dois pontos do eixo real, abandonam este.

Consideremos na fig. 18 o ponto P infinitamente próximo do eixo real, que suporemos pertencer ao lugar das raízes.

Se o ponto P pertence ao lugar das raízes a variação do somatório dos ângulos dos vectores ao passar de P' para P deve ser nula.

Logo:

$$\sum \delta \varphi_j + \sum \delta \varphi'_e = \sum \delta \psi_m + \sum \psi'_o$$

Atendendo porém a que os ângulos são suficientemente pequenos para se poderem igualar às tangentes, teremos:

$$\sum \frac{PP'}{Q_i P'} - \sum \frac{PP'}{Q'_k P'} = -\sum \frac{PP'}{Z_n P'} + \sum \frac{PP'}{Z'_p P'}$$

Substituindo

$$Q_i P' = Q_i Q_1 + Q_1 P' \quad Z_n P' = Z_n Q_1 + Q_1 P'$$

$$Q'_k P' = Q'_k Q'_1 + Q'_1 P' \quad Z'_p P' = Z'_p Q'_1 + Q'_1 P'$$

virá uma equação nas duas incógnitas $Q_1 P'$ e $Q'_1 P'$ que juntamente com a equação.

$$Q_1 P' + Q'_1 P' = Q_1 Q'_1$$

nos dará a localização do ponto P' desejado, isto é $Q_1 P'$ ou $Q'_1 P'$.

f) Determinação do ponto de intersecção do lugar das raízes com o eixo dos imaginários (tratado para um caso particular)

O caso particular em questão é dado pela fig. 19 em que há a considerar somente os polos $-\frac{1}{T_1}$, $-\frac{1}{T_2}$ e 0.

Seja P o ponto procurado.

Nestas condições virá

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ$$

donde:

$$(90 - \psi_1) + (90 - \psi_2) = 90$$

ou:

$$\psi_1 + \psi_2 = 90$$

O ponto P goza, pois, da propriedade de dele se ver o segmento $\left(0, -\frac{1}{T_1}\right) + \left(0, -\frac{1}{T_2}\right)$ sob um ângulo de 90° . Estará pois na intersecção do eixo dos imaginários com a circunferência cujo diâmetro é definido por $-\frac{1}{T_1}, +\frac{1}{T_2}$.

3.2.2 Conclusões a tirar do lugar das raízes

Consideremos o lugar das raízes correspondente a V

$$T_1 \cdot T_2 \cdot \left(\frac{1}{T_1} + s\right) \left(\frac{1}{T_2} + s\right) \cdot s$$

e vejamos que conclusões dele poderemos tirar.

a) Estabilidade

O sistema será estável para valores do ganho inferiores a V' . Efectivamente, a condição de estabilidade obriga a não existência de raízes de $G(s) \cdot H(s) = -1$ na parte direita do plano complexo.

b) Rapidez

O sistema será tanto mais rápido quanto mais afastadas do ponto 0 estiverem as raízes de $G(s) \cdot H(s) = -1$. Efectivamente, se a $F(s)$ corresponde $f(t)$, deslocando os polos e zeros de $F(s)$ homoteticamente na razão $1/m$, obteremos $\Phi(s)$ a que corresponde a função original $\varphi(t)$, tal que $\varphi(t) = f(mt)$, como se poderia demonstrar.

Dando a t um acréscimo δt a partir da origem, o acréscimo correspondente de $\varphi(t)$ será

$$\delta\varphi(t) = \varphi'(o) \cdot \delta t$$

Mas

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(mt) \cdot m \\ \varphi'(o) &= f'(o) \cdot m \\ \delta\varphi(t) &= f'(o) \cdot m \cdot \delta t \end{aligned}$$

Dando agora a t um acréscimo Δt também a partir da origem, virá em $f(t)$:

$$\Delta f(t) = f'(o) \cdot \Delta t$$

para que

$$\delta\varphi(t) = \Delta f(t)$$

deve ter-se

$$\delta t = \frac{\Delta t}{m}$$

c) Precisão

O lugar das raízes pode-nos servir para sabermos que precisão poderemos alcançar num sistema sem que a sua estabilidade perigues. Consideremos a expressão

$$E(s) = \frac{Y(s) - X(s)}{X(s)}$$

em que chamaremos a $E(s)$ erro do sistema. Designaremos por erro de posição o valor que $E(s)$ toma para $s = o$. Esta designação associa-se somente a sistemas em que a uma *elongação* à entrada corresponde uma *elongação* à saída. No caso de a uma *elongação* à entrada corresponder uma *velocidade* ou *aceleração* à saída teríamos a ver com erros de velocidade e de aceleração dados pelas expressões

$$\left[s \cdot \frac{Y(s) - X(s)}{X(s)} \right]_{s=0} \quad \text{e} \quad \left[s^2 \cdot \frac{Y(s) - X(s)}{X(s)} \right]_{s=0}$$

Num sistema realimentado directamente ($H(s) = 1$) o erro de posição virá dado, portanto, por

$$E(o) = \frac{Y(o) - X(o)}{X(o)} = \frac{Y(o)}{X(o)} - 1 = \frac{1}{G(o)} + 1 - 1 = \frac{1}{V}$$

Sabemos neste caso que o sistema será tanto mais preciso quanto maior for o ganho. O lugar das raízes dir-nos-á até onde poderemos aumentar o ganho, sem que a estabilidade perigues.

Se o sistema for realimentado através de outro sistema de função $H(s) \neq 1$ teremos, para erro de posição, como no caso anterior:

$$E(o) = \frac{Y(o)}{X(o)} - 1$$

Sendo porém

$$\frac{Y(o)}{X(o)} = \frac{1}{V} + V'$$

em que V e V' são os ganhos respectivamente das funções $G(s)$ e $H(s)$, virá

$$E(o) = \frac{1}{V} + V' - 1$$

A condição para que $E(o) = 0$ será

$$\frac{1}{V} = 1 - V' \quad \text{ou:} \quad 1 = V - VV'$$

O lugar das raízes indicar-nos-á qual o valor máximo de VV' que poderemos ter nesta equação.

d) Influência das raízes na resposta do sistema

As raízes reais que se encontram predominantemente afastadas têm uma influência reduzida na resposta do sistema.

Efectivamente, sendo elas polos de $F(s)$, função de transferência do sistema realimentado, darão origem na resposta do sistema a termos da forma $A \cdot e^{s_r t}$ em que $|s_r|$ é muito elevado e em que $A = \lim_{s \rightarrow s_r} [(s - s_r) F(s)]$.

Atendendo a que $F(s)$ tende para zero quando s_r tende para infinito, um elevado valor de s_r tornará A muito pequeno. Diremos pois que as raízes muito afastadas geram na resposta termos de pequena amplitude A e pequena constante de tempo ($T = -\frac{1}{s_r}$) que poderemos pois algumas vezes desprezar.

Considerando agora o par de raízes conjugadas de um sistema (fig. 21) veremos que elas definem certas características no termo correspondente da resposta. Efectivamente, $\Omega = \sqrt{\delta^2 + \omega^2}$ dá-nos a pulsação do sistema. O cosseno do argumento ζ determina o amortecimento. Se δ for igual a zero o termo correspondente da resposta será sinusoidal puro. Se for ω igual a zero o termo correspondente será aperiódico.

Estando estes polos predominantemente próximo da origem eles determinam a resposta do sistema. Serão pois chamados polos principais.

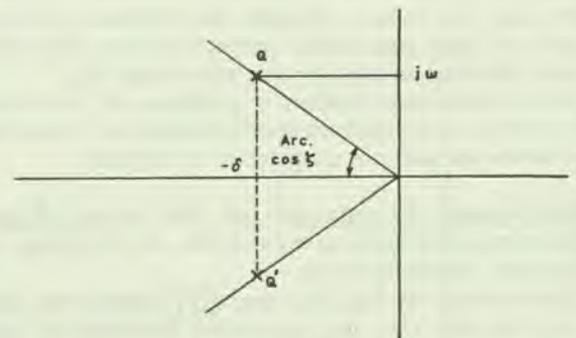


Fig. 21

e) Modificação de características do sistema, controladas ou sugeridas pelo lugar das raízes.

Vimos já modificações das características do sistema motivadas pela variação do ganho. Essa variação do ganho é controlada no lugar das raízes no sentido deste nos dar indicação sobre o limite que não podemos ultrapassar, sob pena da estabilidade perigar.

A analogia hidrodinâmica que mencionamos em 3.2.1c em que os polos representariam fontes e os zeros sumidouros, pode-nos dar sugestões sobre as modificações a realizar num sistema para obter um certo resultado. Usaremos essa analogia no sistema cujo lugar das raízes foi representado na fig. 20. Suponhamos que pretendemos aumentar o ganho V além do valor V' , sem que a estabilidade perigue. Se pensarmos na nossa analogia é intuitivo que uma forma de modificar o percurso de partículas líquidas (dado pelo lugar das raízes) de maneira que a nossa finalidade seja atingida, seria

situar um sumidouro em $-\frac{1}{T_3}$ (fig. 22), isto é, perto

de $-\frac{1}{T_1}$, e uma fonte mais afastada de $-\frac{1}{T_2}$, situada

por exemplo em $-\frac{\alpha}{T_3}$. Efectivamente, como se vê no traçado, conseguimos agora ir até o valor V'' do ganho sem comprometer a estabilidade.

Esta modificação corresponde à introdução no circuito de controle de um elemento cuja função de transferência tenha um polo e um zero respectivamente iguais a

$$-\frac{\alpha}{T_3} \text{ e } -\frac{1}{T_3}$$

3.3 MÉTODO DE BODE

Vamos por fim expor o método de BODE. Este método não tem a generalidade dos anteriores, nem a eloquência do método de EVANS. Além disso é um método aproximado. Ele é porém bastante prático e atendendo a que as limitações que impõe, poucas vezes surgem em sistemas reais o seu uso é bastante frequente.

O método de BODE aplica-se sómente a sistemas, ditos de «fase mínima». Entende-se por um sistema de «fase mínima» aquele cuja função de transferência não possui raízes ou polos no semi-plano imaginário da esquerda.

No sentido de justificar esta definição de sistemas de fase mínima e de os distinguir dos sistemas que não são de fase mínima, enunciaremos o teorema seguinte:

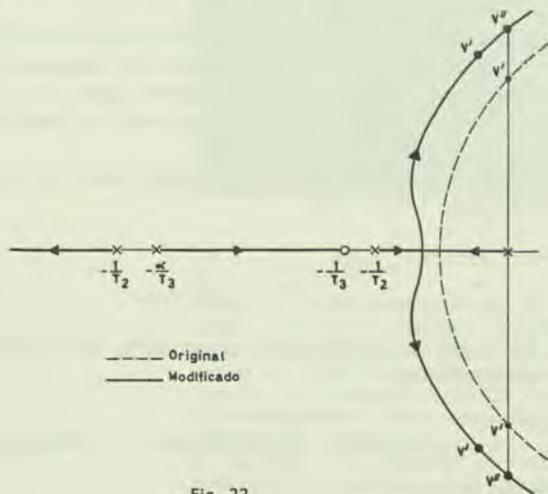


Fig. 22

Qualquer sistema se pode decompor em dois outros sistemas tais que um deles apresenta a mesma curva de ganho mas um desfazamento inferior para cada frequência.

Seja $G(s)$ uma função com $2n$ zeros de parte real positiva. Sejam $a_i \pm jb_i$ um destes zeros e o seu conjugado (fig. 23). Teremos então:

$$G(s) = K \prod_{i=0}^{i=n-1} [s - (a_i + jb_i)] \cdot [s - (a_i - jb_i)]$$

$$G(s) = K \underbrace{\prod_{i=0}^{i=n-1} [s - (-a_i + jb_i)] \cdot [s - (-a_i - jb_i)]}_{G'(s)} \times$$

$$\times \underbrace{\prod_{i=0}^{i=n-1} [s - (a_i + jb_i)] \cdot [s - (a_i - jb_i)]}_{G''(s)}$$

Relativamente a esta decomposição poderemos observar o seguinte:

$G'(s)$ não contém zeros na parte real positiva.

$G''(s)$ é constituído por um produto de factores que para $s = j\omega$ tomam a forma:

$$\frac{-a_i + j(\omega - b_i)}{+a_i + j(\omega - b_i)} \times \frac{-a_i + j(\omega + b_i)}{+a_i + j(\omega + b_i)} = M | \varphi$$

em que

$$M = 1$$

$$\varphi = -2 \left[\text{arc tg } \frac{\omega - b_i}{a_i} + \text{arc tg } \frac{\omega + b_i}{a_i} \right]$$

Vemos nestas condições, que os módulos de $G(s)$, «não de fase mínima», e $G'(s)$, «de fase mínima», variam igualmente em função de ω .

O argumento de $G(s)$ «não de fase mínima» é superior ao de $G'(s)$. Efectivamente, fazendo

$$\text{arc tg } \frac{\omega - b_i}{a_i} + \text{arc tg } \frac{\omega + b_i}{a_i} = \beta < 180^\circ$$

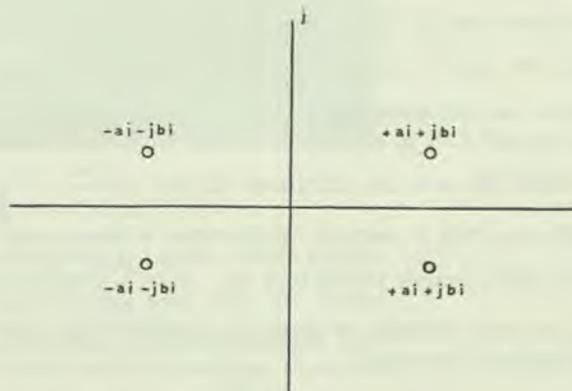


Fig. 23

e considerando arcos positivos, teremos

$$\begin{aligned} \arg G(s) &= 360 - \beta \\ &= \arg G'(s) + (360 - 2\beta) \end{aligned}$$

Donde

$$\arg G'(s) = \beta < 360 - \beta$$

Como vemos pelo diagrama de NYQUIST (fig. 24) isto torna estes elementos dificilmente estáveis. Tais elementos não se encontram frequentemente na prática e por isso a restrição imposta à aplicação do critério de BODE não depara com limitações de aplicação consideráveis. BODE definiu matematicamente certas funções que englobam as funções de fase mínima e escolhendo convenientemente os integrandos (que incluíam as ditas funções), considerou os respectivos integrais no semi-plano complexo da direita, que resolvidos conduzem a relações de grandezas de muito interesse.

Não nos vamos ocupar da demonstração ou enunciado destas relações, pois isso sairia fora do âmbito da nossa exposição. Para o enunciado da condição de estabilidade porém, teremos necessidade de recorrer a uma destas relações que a seguir indicamos sem demonstrar.

A relação em questão será:

$$\varphi(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dA}{du} \log_e \cotg \frac{|u|}{2} \cdot du$$

em que

$\varphi(\omega_0)$ — desfazamento (contado no sentido dos ponteiros do relógio) à pulsação ω_0 que nos interessa

$$u = \log_e \frac{\omega}{\omega_0}$$

$A(u)$ — Amortecimento em nepers.

Tendo presente que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \log_e \cotg \frac{|u|}{2} \cdot du = \frac{\pi^2}{2}$$

esta relação pode tomar ainda a forma

$$\begin{aligned} \varphi(\omega_0) &= \frac{\pi}{2} \cdot \left. \frac{dA}{du} \right|_{u=0} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left. \frac{dA}{du} \right| - \right. \\ &\quad \left. - \left. \frac{dA}{du} \right|_{u=0} \right) \log_e \cotg \frac{|u|}{2} \cdot du \end{aligned}$$

Se notarmos que $\log_e \cotg u$ varia com u segundo a forma indicada na fig. 25, para funções $A(u)$ tais que $\frac{dA}{du}$ seja constante na vizinhança de $u = 0$, o segundo termo da última expressão de $\varphi(\omega_0)$ toma uma importância reduzida.

Com efeito, ao sair da vizinhança de $u = 0$ ($\frac{\omega}{\omega_0} = 1$) a função $\log_e \cotg u$ decresce rapidamente e quando esta se torna muito grande (vizinhança de $u = \infty$) $\frac{dA}{du}$ anula-se.

Desde que esta condição se verifique poderemos pois sem erro apreciável dizer que:

$$\varphi(\omega_0) = \frac{\pi}{2} \cdot \left. \frac{dA}{du} \right|_{u=0}$$

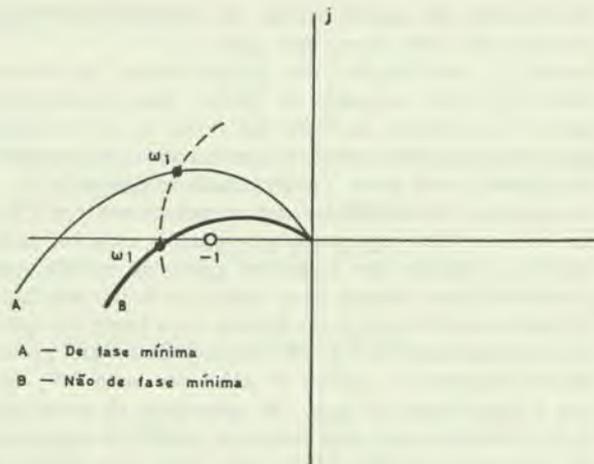


Fig. 24

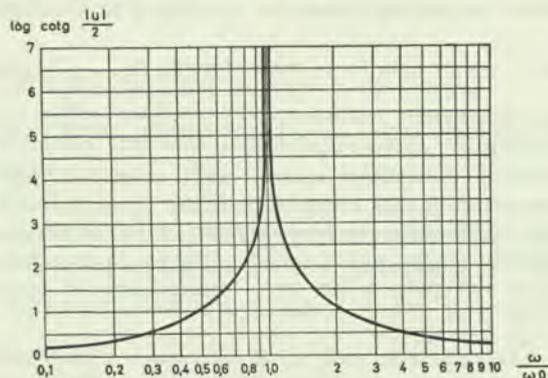


Fig. 25

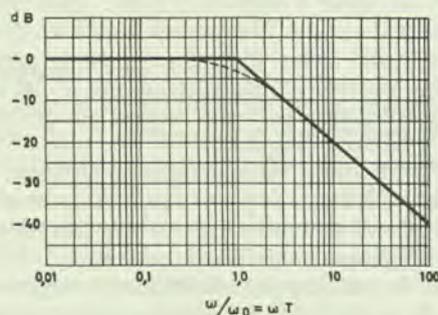


Fig. 26

Lembrando agora a forma original do critério de NYQUIST, ao pretender exprimi-la em termos de atenuação e fase diremos que para um amortecimento igual a 0 a fase terá que ser maior que π e portanto, o desfazamento $\varphi(\omega_0)$ terá que ser menor que π .

Utilizando a relação anterior, teremos para um amortecimento nulo ($A(u) = 0$):

$$\varphi(\omega_0) = \frac{\pi}{2} \cdot \left. \frac{dA}{du} \right|_{u=0} < \pi$$

o que equivale a acrescentar na condição de estabilidade a desigualdade:

$$\frac{dA}{du} < 2np/\text{unidade} = 40 \text{ dB/década} = 12 \text{ dB/oitava para } A(u) = 0.$$

Como resultado das considerações anteriores, esta condição é aproximada. Em consequência da escala logarítmica que usa, o Método de BODE, permite reduzir as multiplicações de funções de transferência, à adição de módulos e argumentos.

Além disso o traçado da característica de amortecimento, pode-se fazer de uma forma muito prática introduzindo simplificações em geral toleráveis¹⁶. Trataremos uma simplificação no caso da função de transferência

$$\left[F(s) \right]_{s=j\omega} = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Se admitirmos que

$$F(j\omega) \approx 1$$

para frequências tais que

$$\omega T = \frac{\omega}{\omega_0} \leq 1$$

e

$$F(j\omega) \approx \frac{1}{\omega T} = \frac{\omega_0}{\omega}$$

para frequências tais que

$$\omega T = \frac{\omega}{\omega_0} \geq 1$$

poderemos traçar imediatamente a característica de amortecimento (fig. 26, traçado a cheio). Considerando o traçado rigoroso (fig. 26, a ponteadado) vemos que os erros cometidos não são apreciáveis.

(Continua)

MÁRIO TRIGO TRINDADE

Engenheiro Electrotécnico (U.P.)

SIDERURGIA NACIONAL

¹⁶ CHESTNUT AND MAYER — *Servomechanisms and Regulating System Design*, — John Wiley & Sons Inc., New York 1951, p. 302 seguintes.



ELECTRICAL ENGINEERS EXHIBITION

Perto de 75 000 pessoas vindas de 88 países foram a Londres visitar a tradicional «Electrical Engineers Exhibition» em Earls Court.

Esta fotografia mostra uma vista geral da exposição deste ano, que ocupou cerca de 42 000 metros quadrados, com 471 expositores.

No dia da inauguração, em 21 de Março, 56 países foram representados por 25 embaixadores, altos comissários e representantes diplomáticos superiores no almoço oficial.

A exposição do próximo ano realizar-se-á de 20 a 24 de Março e a sua principal característica será «A electricidade na aviação».