

INTRODUÇÃO À TEORIA DO CONTROLE *

4 — Aplicação

Vamos fazer uma aplicação da teoria dada à regulação de velocidade de uma turbina hidráulica acoplada com o respectivo alternador.

Utilizaremos neste capítulo a nomenclatura usual no tratamento deste problema particular de regulação, falando assim como veremos de *estatismos*, *prontidão*, etc. Reconhecemos porém que estas designações só se têm conservado, quando associadas ao problema da regulação de turbinas. Princípios por estudar o sistema a regular para estudarmos em seguida, se um tipo de regulador lhe convém.

4.1 — SISTEMA A REGULAR

O sistema a regular encontra-se representado na fig. 27 e é constituído por *sistema alimentador da turbina, turbina, alternador e rede*.

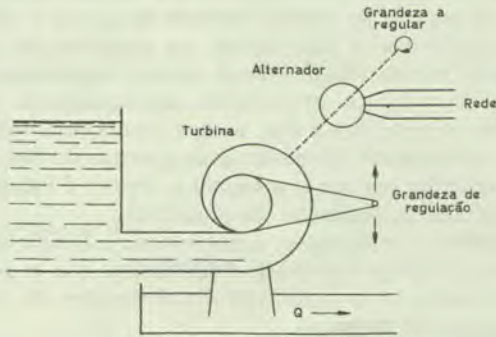


Fig. 27

A grandeza a regular é a velocidade do grupo turbina-alternador, sendo a grandeza de regulação correspondente, a abertura do distribuidor da turbina, que comanda a potência fornecida a esta.

Vamos determinar a função de transferência do sistema a regular, considerando como grandeza de entrada a abertura do distribuidor e como grandeza de saída a velocidade de rotação do grupo.

Sabemos que a causa imediata de uma variação de velocidade Ω é o aparecimento de um momento resultante diferente de zero, isto é, um desequilíbrio entre o momento motor e o momento resistente. Este fenómeno é regido pela equação conhecida

$$I \cdot \frac{d\Omega}{dt} = M_m - M_r \quad (1)$$

em que

- I — Momento de inércia das massas girantes
- Ω — Velocidade de rotação
- M_m — Momento motor
- M_r — Momento resistente

Escrevendo esta equação na forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\Omega}{\Omega_o} = \frac{M_o}{I \cdot \Omega_o} \left(\frac{M_m}{M_o} - \frac{M_r}{M_o} \right) \quad (2)$$

em que Ω_o e M_o são valores constantes (nominais) das grandezas Ω e M , e fazendo

$$\begin{aligned} \frac{M_m}{M_o} &= m_m \\ \frac{M_r}{M_o} &= m_r \\ \frac{\Omega - \Omega_o}{\Omega_o} &= \Delta\omega \end{aligned}$$

teremos:

$$\frac{d}{dt} \Delta\omega = \frac{M}{I \cdot \Omega_o} (m_m - m_r) \quad (2')$$

onde as grandezas absolutas foram substituídas por grandezas relativas ¹⁷.

A expressão

$$T = \frac{I \Omega_o}{M_o} = \frac{I \Omega_o^2}{P_o} \quad (3)$$

designa-se por tempo característico de inércia das massas girantes e costuma apresentar-se sob a forma:

$$T = \frac{PD^2 \cdot n^2}{0,27 \cdot \Pi_o} \cdot 10^{-6} \text{ em segundos} \quad (3')$$

em que

$$\begin{aligned} PD^2 &\text{ é expresso em kg.m}^2 \\ n &\text{ » » » rot/min} \\ \Pi_o &\text{ » » » Cv} \end{aligned}$$

Este «tempo característico» associado a um grupo corresponde ao tempo necessário para o levar do estado de repouso à velocidade nominal, quando lhe é aplicado um momento igual ao momento nominal.

Substituindo $\frac{M_o}{I \Omega_o}$ na equação (2') virá

$$\frac{d}{dt} \Delta\omega = \frac{1}{T} (m_m - m_r) \quad (4)$$

Vamos agora procurar exprimir a diferença $m_m - m_r$ dos momentos, em função de uma variação da abertura do distribuidor que admitimos ser igual à variação de potência Δp correspondente, fornecida à turbina. Para expressão do momento motor, tendo presente que ele também varia

* A publicação deste trabalho, que vem a ser feita desde o nº 17, termina neste número.

¹⁷ Na exposição que se segue em vez de considerarmos grandezas absolutas G , consideraremos grandezas relativas $g = \frac{G}{G_o}$. Lidaremos assim com grandezas adimensionais.

dependentemente da variação de velocidade motivada pelo aumento da abertura do distribuidor teremos

$$m_m = 1 + \Delta p + \frac{\partial m_m}{\partial \omega} \cdot \Delta \omega \quad (5)$$

Para expressão do momento resistente, observando que além de $\Delta \omega$, ele depende também da natureza da carga do alternador (que exprimimos pelo parâmetro λ), teremos

$$m_m = 1 + \frac{\partial m_r}{\partial \lambda} \cdot \Delta \lambda + \frac{\partial m_r}{\partial \omega} \cdot \Delta \omega \quad (6)$$

Fazendo em (5) e (6)

$$\alpha_m = \frac{\partial m_m}{\partial \omega} \quad \text{e} \quad \alpha_r = \frac{\partial m_r}{\partial \omega}$$

e admitindo

$$\alpha_m = \alpha_r$$

$$\frac{\partial m_r}{\partial \lambda} = 0$$

virá para (4)

$$\frac{d}{dt} \Delta \omega = \frac{1}{T} \Delta p$$

ou, passando para a equação imagem:

$$s \cdot \Omega(s) - \left[\Delta \omega \right]_{t=0} = \frac{1}{T} \Pi(s)$$

em que $\Omega(s)$ é imagem de $\Delta \omega$ e $\Pi(s)$ é imagem de Δp .

Escolhendo a origem dos tempos de modo a ser $\left[\Delta \omega \right]_{t=0} = 0$ virá:

$$s \cdot \Omega(s) = \frac{1}{T} \Pi(s)$$

A função de transferência do sistema a regular, dentro das hipóteses simplificativas feitas virá então dada por

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{\Pi(s)} = \frac{1}{T \cdot s}$$

4.2 REGULADOR

Neste capítulo vamos principiar, por considerar um tipo de regulador que pareceria mais natural à nossa intuição, faremos uma análise do respectivo circuito de controle com esse regulador e o sistema a regular considerado, e procuraremos uma solução para as dificuldades encontradas na aplicação deste regulador, usando a teoria que tratamos.

4.2.1 Regulador astático taquimétrico

Consideremos a fig. 28. Nela encontra-se indicado um taquímetro T formado por um balancê que gira com a velocidade do nosso grupo turbina-alternador. Quando a velocidade de rotação da máquina é igual à prescrita, o ponto N toma uma posição tal que na gaveta C ,

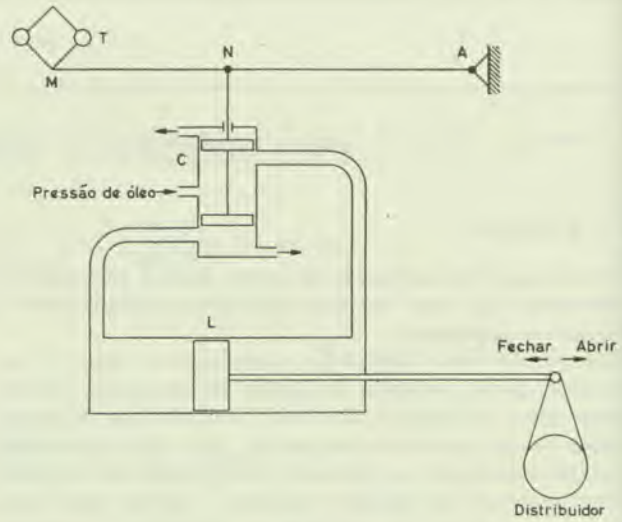


Fig. 28

os orifícios de acesso de pressão de óleo, às faces do êmbolo L se fecham.

Quando a velocidade de rotação é superior ou inferior à prescrita, o ponto N deslocar-se-á respectivamente para cima ou para baixo sendo o êmbolo da gaveta C solicitado de maneira que a face direita ou esquerda do êmbolo L receba pressão deslocando-se este no sentido respectivamente do fecho ou abertura do distribuidor da turbina. O ponto A neste caso é fixo, do que resulta ser o valor prescrito da velocidade independente da abertura do distribuidor. Um regulador em que a grandeza a regular é independente da grandeza de regulação diz-se *astático*.

Feitas estas considerações vamos estudar a função de transferência do nosso regulador. Admitiremos que as variações de velocidade se transformam em elongações do ponto N sem atraso ou distorção.

Consideremos que, nos orifícios da gaveta, a secção aberta à passagem do óleo é proporcional à elongação de N e portanto a $\Delta \omega$. Por outro lado desprezando o atrito do êmbolo contra as paredes e a sua inércia, ele deslocar-se-á com uma velocidade $\frac{d}{dt} \Delta x$ proporcional a $\Delta \omega$. Considerando que a abertura do distribuidor varia linearmente com a potência recebida pela turbina teremos

$$\frac{d}{dt} \Delta p' = - \frac{1}{\tau} \Delta \omega'$$

A constante τ , que tem as dimensões de um tempo, designa-se por característica da *prontidão de regulação*. Ela dá-nos indicação sobre a variação da potência por segundo (em percentagem), determinada por um afastamento da frequência.

A partir da equação diferencial que estabelecemos, tal como no caso anterior, facilmente tiraremos a função de transferência correspondente que virá dada por

$$H(s) = \frac{\Pi'(s)}{\Omega'(s)} = \frac{1}{\tau \cdot s}$$

Conhecidos $G(s)$ e $H(s)$ poderemos agora estudar o comportamento do sistema, equipado com um regulador astático taquimétrico.

A função de transferência correspondente será ¹⁸

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 - H(s) \cdot G(s)} = \frac{\frac{1}{T \cdot s}}{1 + \frac{1}{T \cdot \tau \cdot s^2}}$$

Tracemos a sua característica de frequência (fig. 29). Vemos quando $j\omega$ varia de $j \cdot 0$ a $j \cdot \infty$, $-G(s) \cdot H(s)$ varia de $-\infty$ a 0, e quando $j\omega$ varia de $-j\infty$ a $j \cdot 0$, $-G(s) \cdot H(s)$ varia de 0 a $-\infty$, passando em ambos os trajectos pelo ponto $1 + j \cdot 0$, e não obedecendo portanto à condição de estabilidade do critério de NYQUIST, a seu tempo enunciada. Este caso em que a característica de frequência contém o ponto $-1 + j \cdot 0$ corresponde ao estabelecimento de oscilações de amplitude constante no sistema realimentado. Vejamos que modificações teremos que realizar no regulador para que o sistema resulte francamente estável.

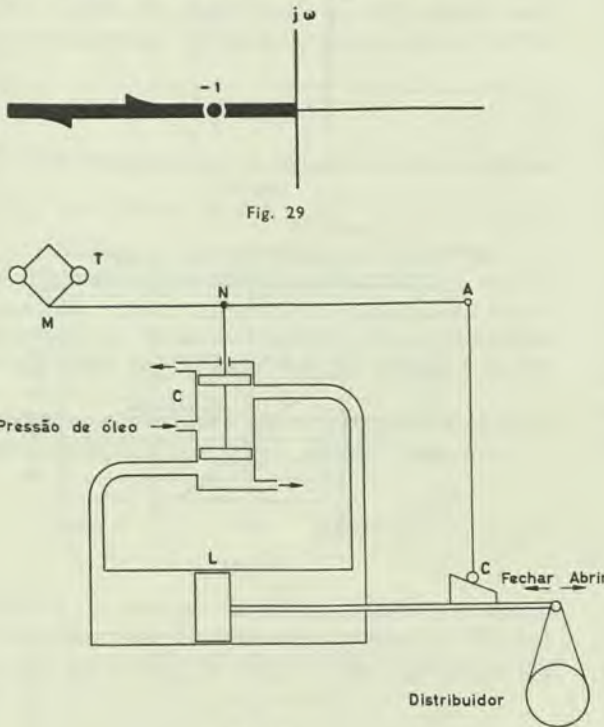


Fig. 29

Fig. 30

Efectivamente, a uma variação de velocidade sobrepõe-se agora, na elongação de N , a variação de potência correspondente dada por $\rho \Delta p$. Ao coeficiente ρ dá-se o nome de *estatismo do regulador*, que se pode fazer variar actuando na razão dos comprimentos MN e NA , ou na inclinação da patilha C .

Vejamos agora qual a função de transferência do nosso regulador. Retomando as hipóteses anteriormente consideradas estabeleceremos a equação diferencial relativa ao regulador que virá dada por

$$\frac{d}{dt} \Delta p' = -\frac{1}{\tau} (\Delta \omega' + \rho \Delta p')$$

ou:

$$\tau \frac{d}{dt} \Delta p' + \rho \Delta p' = -\Delta \omega'$$

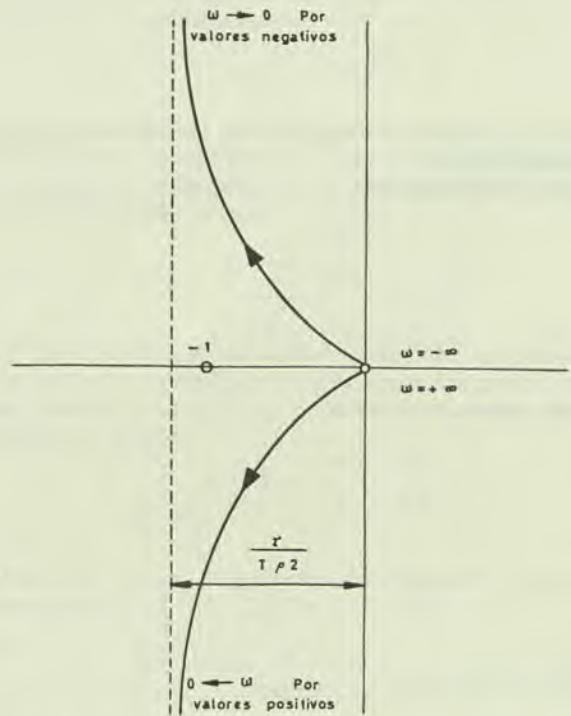


Fig. 31

4.2.2 Regulador estático taquimétrico

Uma forma de obstar a que o sistema seja instável é a recor-rência a um regulador *estático*. Diz-se que um regulador é estático quando o valor prescrito de grandeza a regular é função da grandeza de regulação.

Uma forma de tornar o regulador que representamos na fig. 28 estático será introduzir-lhe um dispositivo que desloque o ponto A , dependentemente da posição do êmbolo L . Um meio de conseguir isto encontra-se representado na fig. 30, em que uma patilha C eleva o ponto A quando a potência aumenta e inversamente.

Antes de procurarmos a função de transferência deste regula-dor reparemos que as elongações do ponto N já não são proporcionais ao afastamento da velocidade do seu valor prescrito, mas sim proporcionais a uma combinação linear de $\Delta \omega$, e de Δp , dada por

$$\Delta \omega + \rho \Delta p$$

donde tiraremos a função de transferência $H(s)$ corres-pondente

$$H(s) = -\frac{1}{\rho + \tau \cdot s}$$

Atendendo a que a função de transferência do sistema a regular se não modificou, virá para função de transferência do sistema realimentado

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s) \cdot H(s)} = \frac{\frac{1}{T \cdot s}}{1 + \frac{1}{T \cdot s} \cdot \frac{1}{\tau \left(\frac{\rho}{\tau} + s \right)}}$$

¹⁸ Repare-se que o carácter negativo da realimentação foi já consi-derado, ao fazer-se $H(s) = -\frac{\tau \cdot s}{l}$.

Se recorrermos ao traçado vectorial da característica de frequência de $-G(s) \cdot H(s)$ obteremos o traçado indicado na fig. 31 onde podemos ver que a curva característica percorrida no sentido crescente das frequências não descreve nenhuma rotação no sentido dos ponteiros do relógio, em torno de $-1 + j \cdot 0$. O critério de NYQUIST diz-nos portanto que o sistema é estável.

Analisemos agora o nosso sistema à luz do método de EVANS. Vejamos em primeiro lugar qual o ganho da função $-G(s) \cdot H(s)$.

$$\left[\frac{1}{T \cdot \tau \cdot s \left(\frac{\rho}{\tau} + s \right)} \times s \right]_{s=0} = \frac{1}{T \cdot \rho}$$

Tracemos agora o lugar das raízes correspondente a

$$\frac{1}{T \cdot \rho} \cdot \frac{\tau}{\rho} \cdot s \left(\frac{\rho}{\tau} + s \right) = -1$$

Impondo a condição dos argumentos, seremos conduzidos ao traçado da fig. 32.

Impondo a condição dos módulos seremos conduzidos a

$$\left| \frac{\frac{1}{T \rho}}{\frac{\tau}{\rho} \cdot s \cdot \left(\frac{\rho}{\tau} + s \right)} \right| = 1$$

condição que se verificará se:

$$+ \frac{1}{T \rho} = \frac{\tau}{\rho} \cdot s \cdot \left(\frac{\rho}{\tau} + s \right)$$

ou se:

$$- \frac{1}{T \rho} = \frac{\tau}{\rho} \cdot s \cdot \left(\frac{\rho}{\tau} + s \right)$$

Explicitando em ordem a s , teremos:

$$s = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{\rho^2}{\tau^2} + \frac{1}{T \rho}}$$

ou:

$$s = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{\rho^2}{\tau^2} - \frac{1}{T \rho}}$$

A primeira condição é de excluir atendendo a que conduz a valores de s , que não satisfazem à condição dos argumentos. Analisemos portanto a segunda expressão das raízes.

Quanto maior for a razão $\frac{\rho}{\tau}$, mais afastadas se encontrarão as raízes da zona de instabilidade.

Se $\frac{1}{T \rho} < \frac{1}{4} \cdot \frac{\rho^2}{\tau^2}$ os termos destas raízes na resposta do

sistema são aperiódicos. Se $\frac{1}{T \rho} > \frac{1}{4} \cdot \frac{\rho^2}{\tau^2}$ os termos respectivos são sinusoidais amortecidos; o sistema responderá mais rapidamente todavia com um amortecimento menor (cos ζ menor).

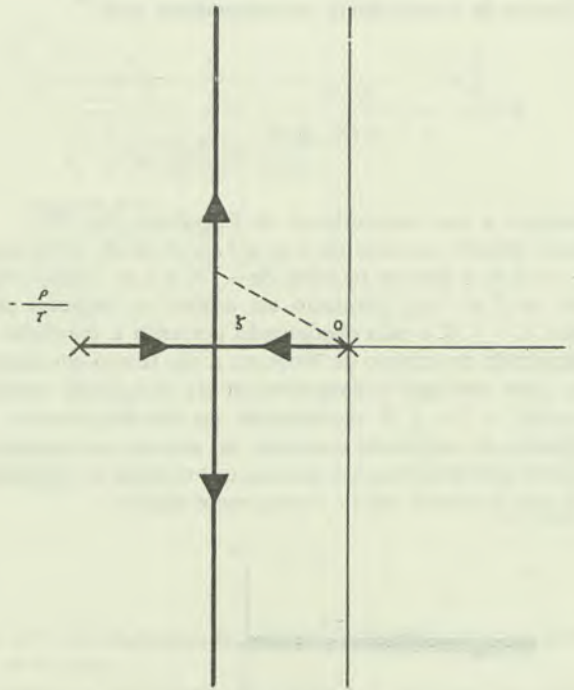


Fig. 32

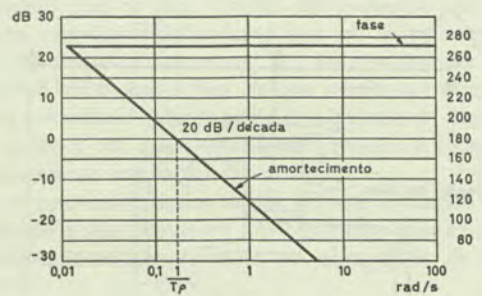


Fig. 33

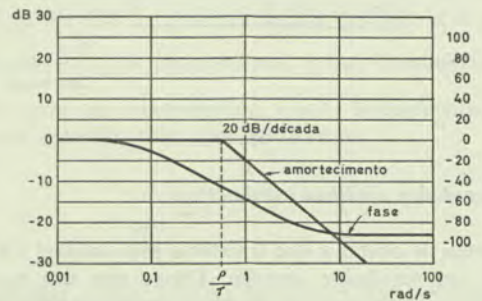


Fig. 34

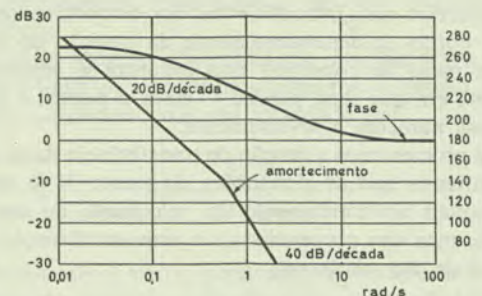


Fig. 35

Analisemos uma vez mais o mesmo sistema recorrendo agora ao método de BODE.

Vimos que a sua função de transferência era

$$F(s) = \frac{1}{Ts} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{Ts} \cdot \frac{1}{\rho + \tau \cdot s}}$$

Vamos considerar as curvas de amortecimento e fase da função

$$\frac{1}{j\omega T\rho} \times \frac{1}{1 + j\omega \frac{\tau}{\rho}}$$

Por uma questão de simplicidade consideraremos estas funções separadamente. Teremos as representações correspondentes a

$$\frac{1}{j\omega T\rho} \text{ e a } \frac{1}{1 + j\omega \frac{\tau}{\rho}}$$

figuras 33 e 34. Consideremos as variações de amortecimento em decibels por década $(20 \log. \frac{k\omega_1}{k \cdot 10\omega_1})$ em ambas as

figuras e adicionemos amortecimentos e fases (fig. 35). Sabemos que, para que o sistema seja estável, terá que ser maior que 180° a fase correspondente à atenuação nula e que além disso o valor da variação do amortecimento quando este passa por zero terá que ser inferior a 40 dB/década.

Vemos nestas condições que a primeira condição se observa. A segunda condição observar-se-á também desde que

$$\frac{1}{T\rho} < \frac{\rho}{\tau} \quad \text{ou} \quad \rho^2 > \frac{\tau}{T}$$

Efectivamente, a variação de amortecimento por década nestas condições será 20dB/década quando o amortecimento passa por zero. Com esta aplicação fecharemos este capítulo.

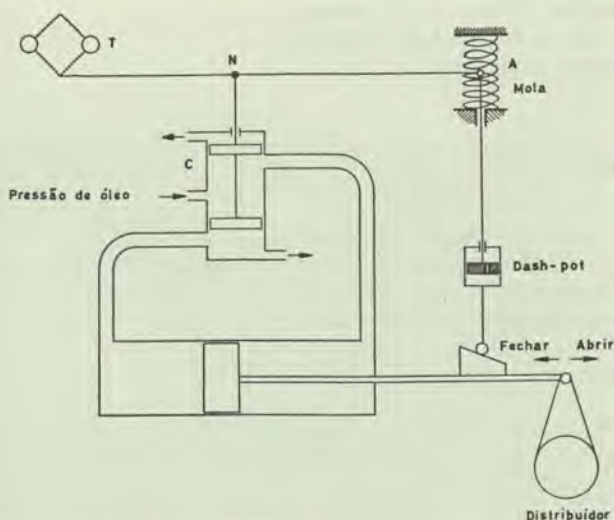


Fig. 36

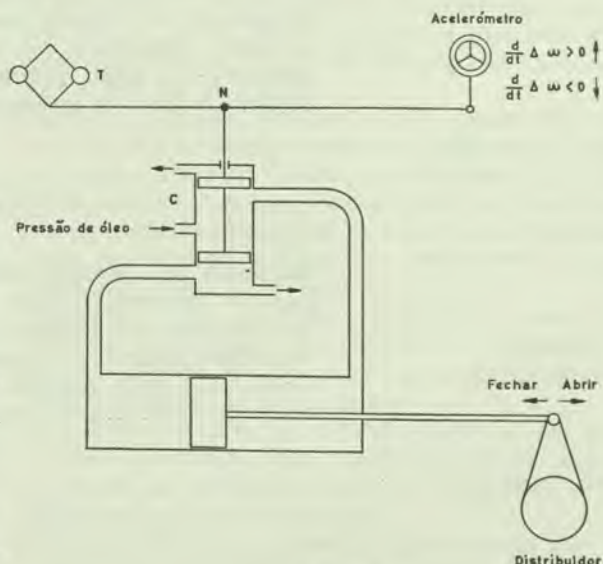


Fig. 37

Queremos frisar que tratámos este problema de regulação com vista à ilustração da teoria dada e com hipóteses simplificativas que nos afastaram da realidade. Diremos ainda que o regulador estático taquimétrico com estatismo permanente, tal como o consideramos não vem resolver o problema da regulação de frequência do nosso grupo turbina hidráulica-alternador debitando sobre uma rede passiva. Efectivamente, o estatismo necessário para tornar o grupo estável, obrigaria a proibitivas variações de frequência entre a marcha em vazio e a plena carga.

O problema resolve-se recorrendo a reguladores taquimétricos com estatismo temporário (fig. 36) ou a reguladores acclero-taquimétricos em que, como se vê na fig. 37 além da velocidade de rotação se mede também a aceleração correspondente.

A equação diferencial relativa ao primeiro caso (regulador taquimétrico com estatismo temporário) estabelecer-se-á mediante as seguintes condições:

O deslocamento do cilindro do êmbolo está relacionado com a potência fornecida segundo

$$\Delta \omega_c = \rho' \cdot \Delta p'$$

em que ρ' se designa por estatismo temporário.

Considerando o escoamento do fluido do «dash-pot» laminar e a força exercida pelas molas correspondentes proporcional à elongação teremos

$$\Delta \omega_p = \frac{1}{\tau'} \cdot \frac{d}{dt} (\Delta \omega_c - \Delta \omega_p)$$

em que τ' se designa por tempo de relaxação de «dash-pot». Por seu turno, no regulador propriamente dito, considerando $\Delta \omega_p$, medido à escala e com o sentido das variações de velocidade $\Delta \omega$, teremos:

$$\frac{d}{dt} \Delta p' = - \frac{1}{\tau} (\Delta \omega' + \Delta \omega_p)$$

Eliminando $\Delta \omega_c$ e $\Delta \omega_p$, nestas três equações, a equação procurada virá:

$$\left(\frac{\tau}{\tau'} + \rho'\right) \cdot \frac{d}{dt} \Delta p' + \tau \cdot \frac{d^2}{dt^2} \Delta p' = - \frac{1}{\tau'} \Delta \omega' - \frac{d}{dt} \Delta \omega'$$

A equação diferencial relativa ao segundo caso (regulador acelerado-taquimétrico), deduz-se directamente, vindo dada por

$$\frac{d}{dt} \Delta p' = -\frac{1}{\tau} \left(\Delta \omega' + m \frac{d}{dt} \Delta \omega' \right)$$

em que o coeficiente m se designa por dosagem acelerométrica e representa o efeito de uma aceleração $\frac{d}{dt} \Delta \omega'$ relativamente a um afastamento da velocidade $\Delta \omega'$. Concretizando, se m for igual à unidade, o efeito de uma aceleração $\frac{d}{dt} \Delta \omega' = 2\%$ no regulador será igual ao efeito de um afastamento da velocidade $\Delta \omega' = 2\%$.

Dispensar-nos-emos de tratar estes casos, por nos parecer que isso seria sair do âmbito deste trabalho, em que nos propusemos expor uma *introdução à teoria do controle em geral*.

MÁRIO TRIGO TRINDADE
Engenheiro Electrotécnico (U.P.)
SIDERURGIA NACIONAL

BIBLIOGRAFIA

- CHESTNUT AND MAYER — *Servomechanisms and Regulating System Design* — John Wiley and Sons, Inc., New York 1955.
- WALTER EVANS — *Control System Dynamics* — McGraw-Hill Book Company, Inc., New York 1954.
- TSZEN — *Engineering Cybernetics* — McGraw-Hill Book Company, Inc., New York
- WINFRIED OPPELT — *Kleines Handbuch Technischer Regelvorgänge* — Verlag Chemie, Weinheim 1956
- BEIHEFTE ZUR REGELUNGSTECHNIK — *Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung in der Regelungstechnik*, — Verlag H. Oldenbourg, München 1955.
- J. C. GILLE, M. PELLEGRIN — *Théorie et Technique des Asservisements* — Dunod, Paris 1958.
- RENÉ PERRET — *Les instruments mathématiques dans les servomécanismes linéaires* — «Automatisme», 1958, N.ºs 1, 8 et 9.
- W. FREY — *Beweis einer Verallgemeinerung des Stabilitätskriteriums von Nyquist sowie desjenigen von Leonhard* — Brown Boveri Mitteilung 23 (1946) Heft 3.

BOLSAS DE ESTUDOS CIENTÍFICOS DA OTAN

Encontra-se em execução novo programa de Bolsas de Estudos Científicos da Organização do Tratado do Atlântico-Norte, destinado exclusivamente a diplomados universitários.

São admitidos pedidos de Bolsas nos seguintes ramos da ciência e da tecnologia: matemática, física, química, biologia, engenharia e medicina não-clínica.

Poderão, ainda, ser consideradas aplicações destas ciências e técnicas, nomeadamente às ciências sociais.

Os pedidos de Bolsas, a formular em impresso próprio, deverão ser apresentados ou enviados, até 15 de Janeiro de 1962, ao secretário da Comissão Coordenadora da Investigação para a OTAN — Presidência do Conselho, Palácio de S. Bento, Lisboa-2 —, a quem poderão ser solicitados os referidos impressos e todos os esclarecimentos necessários.

CPIN

Recebemos uma brochura intitulada «A Companhia Portuguesa de Indústrias Nucleares e as Entidades suas Accionistas», com texto em português e em inglês, na qual, por meio de gráficos, fotografias e pequenos quadros, se dá uma ideia concisa, mas muito sugestiva do apreciável potencial industrial e financeiro daquele conjunto de empresas.