

# Discretização do Controlador PID

## RESUMO

*Digitaliza-se o controlador PID analógico sob as formas posicional e incremental, discutindo os comportamentos das componentes integral e derivada: erro de integração, técnicas de anti-volta a reimportar, erro de derivação e excesso da variável de controlo.*

**Palavras-chave:** algoritmos de controladores PID, efeito anti-volta a reimportar.

## PRINCÍPIO DE DISCRETIZAÇÃO

O controlador PID (proporcional-integral-derivado) é o tipo de sistema controlador mais comum na prática, pois ainda permite concretizar os tipos P, PI ou PD, conforme os valores atribuídos aos parâmetros característicos  $K_p$  (ganho),  $T_i$  (taxa de dosagem integral) e  $T_d$  (taxa de dosagem derivada), segundo a função de transferência ideal na forma canónica

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

De acordo com as especificações do sistema de controlo completo, efectua-se a sintonização do controlador PID, por exemplo, pelo método de Ziegler-Nichols. Esta tarefa consiste em escolher os valores dos parâmetros do controlador, durante a síntese do seu projecto, que melhor se ajustam ao comportamento global do sistema de controlo. É claro que o conhecimento de um modelo dinâmico da instalação a controlar permite dimensionar os parâmetros do controlador por outros métodos da teoria de sistemas no tempo contínuo, como o diagrama de Bode. Então, a partir da função de transferência  $C(s)$  obtida para o controlador, aplicam-se os métodos de discretização a este controlador analógico para se definir a função de transferência  $C(z)$  do correspondente controlador digital.

Convém notar que o termo da derivada realiza-se sempre com um certo retardamento, caracterizado por uma determinada constante de tempo  $T_a$ . Nestas condições, em vez de  $T_d s$  considera-se a relação  $T_d s / (1 + T_1 s)$ , onde o denominador define aquele efeito de retardamento. Daí resulta a forma canónica

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_1 s} \right)$$

O retardamento (de 1ª ordem) da componente derivada do controlador exprime a inserção de um

filtro passa-baixo, que se recomenda implementar para facilitar a discretização, embora a síntese do controlador analógico possa desprezar a respectiva constante de tempo. Geralmente faz-se  $T_1$  proporcional a  $T_d$ , numa relação  $T_1 = N T_d$  com o inteiro  $N$  fixado previamente entre 3 e 20, muitas vezes com o valor 10.

## FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA AMOSTRADA

Uma instalação com o comportamento de um sistema PID possui uma função de transferência  $F(s)$  com idêntico formato. Por isso, a sua função de transferência amostrada [2]

$$F(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\mathcal{S}^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{s} \right\}$$

será

$$F(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\mathcal{S}^{-1} \left\{ \frac{K_p}{s} \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_1 s} \right) \right\}$$

donde se deduz

$$F(z) = K_p \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\mathcal{S}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} + \frac{1}{T_i s^2} + \frac{T_d}{T_1} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} \right\}$$

e com as transformações indicadas vem

$$F(z) = K_p \left( 1 + \frac{T_a}{T_i} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{T_d}{T_1} \cdot \frac{z-1}{z - e^{-T_a/T_1}} \right)$$

Como na discretização se usa um período de amostragem  $T_a$  muito menor que a constante de tempo de retardamento  $T_1$ , verifica-se  $T_a/T_1 \ll 1$  e portanto é  $e^{-T_a/T_1} \approx 1 - T_a/T_1$ , pelo que se conclui a aproximação

$$F(z) \approx K_p \left( 1 + \frac{T_a}{T_i} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{T_d}{T_1 + T_a} \cdot \frac{z-1}{z - \frac{T_a}{T_1 + T_a}} \right)$$

O processo de amostragem de um controlador PID analógico com a mesma função de transferência conduz, obviamente, a um resultado semelhante

$$C(z) = K_p \left( 1 + \frac{T_a}{T_i} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{T_d}{T_1 + T_a} \cdot \frac{z-1}{z - \frac{T_1}{T_1 + T_a}} \right)$$

identificando as componentes proporcional, integral e derivada. Como casos particulares, ter-se-á:

- Controlador P ( $T_i = \infty$ ,  $T_d = 0$ )

$$C(z) = K_p$$

- Controlador PI ( $T_d = 0$ )

$$C(z) = K_p \left( 1 + \frac{T_a}{T_i} \cdot \frac{1}{z-1} \right)$$

- Controlador PD ( $T_i = \infty$ )

$$C(z) = K_p \left( 1 + \frac{T_d}{T_1 + T_a} \cdot \frac{z-1}{z - \frac{T_1}{T_1 + T_a}} \right)$$

expressões que se simplificam na hipótese dos modelos puros, com  $T_1 = 0$  (sem retardamento da componente derivada).

Mas o resultado obtido atinge-se pelos métodos de discretização de Euler [3], como se indica a seguir. Aliás, estes métodos de discretização permitem formular diferentes algoritmos de controle PID digital, evidentemente, todos com aproximações mais ou menos aceitáveis.

Nesta abordagem, discutem-se duas formulações distintas do controlador digital: uma posicional e outra incremental.

#### CONTROLADOR PID SOB FORMA POSICIONAL

A discretização de  $C(s)$  usando o 1º método de Euler (ou do retângulo dianteiro) no termo integral, com  $s = (z-1)/T_a$ , e o 2º método de Euler (ou do retângulo traseiro) no termo derivado, por meio de  $s = (z-1)/T_a z$ , fornece imediatamente

$$C(z) = K_p \left( 1 + \frac{T_a}{T_i} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{T_d}{T_1 + T_a} \cdot \frac{z-1}{z - \frac{T_1}{T_1 + T_a}} \right)$$

igual à aproximação da função de transferência amostrada. Por isso, diz-se que se trata da forma normal do controlador PID digital. Também se refere por forma posicional, porque define um algoritmo de controle dado pelas amplitudes das variáveis terminais nas sucessivas posições temporais do actuador: erro de controle  $e(k)$  na entrada do controlador e variável de controle  $u(k)$  na sua saída.

A codificação do algoritmo de controle referente a  $u(k)$  obtém-se de  $C(z) = U(z)/E(z)$  sob a forma de

uma fracção racional com potências negativas de  $z$ . Após algum cálculo laborioso escreve-se essa expressão, à qual se aplica a transformação em  $z$  inversa para obter a equação às diferenças do controlador [1].

Simplifica-se o procedimento separando a expressão  $U(z) = C(z) E(z)$  nas três componentes fundamentais do tipo de sistema: com o ganho  $K_p$  em evidência, ou seja,

$$U(z) = K_p [U_p(z) + U_i(z) + U_d(z)]$$

a componente proporcional é

$$U_p(z) = E(z)$$

a componente integral vem

$$U_i(z) = \frac{T_a}{T_i} \cdot \frac{1}{z-1} E(z)$$

e a componente derivada será

$$U_d(z) = \frac{T_d}{T_1 + T_a} \cdot \frac{z-1}{z - \frac{T_1}{T_1 + T_a}} E(z)$$

que operam em paralelo (Fig. 1), para que a saída  $U(z)$  do controlador seja a sobreposição das três contribuições, quer dizer,

$$U(z) = \left[ E(z) + \frac{T_a}{T_i} \cdot \frac{1}{z-1} E(z) + \frac{T_d}{T_1 + T_a} \cdot \frac{z-1}{z - \frac{T_1}{T_1 + T_a}} E(z) \right]$$

sendo então, com potências negativas de  $z$ ,

$$U_p(z) = E(z)$$

$$U_i(z) = \frac{T_a}{T_i} \cdot \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} E(z)$$

$$U_d(z) = \frac{T_d}{T_1 + T_a} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1 - \frac{T_1}{T_1 + T_a} z^{-1}} E(z)$$

donde vêm as codificações do algoritmo de controle

$$e(k) = r(k) - y(k)$$

$$u_p(k) = e(k)$$

$$u_i(k) = u_i(k-1) + \frac{T_a}{T_i} e(k-1)$$

$$u_d(k) = \frac{T_d}{T_1 + T_a} \left\{ u_d(k-1) + \frac{T_a}{T_1} [e(k) - e(k-1)] \right\}$$

$$u(k) = K_p [e(k) + u_i(k) + u_d(k)]$$

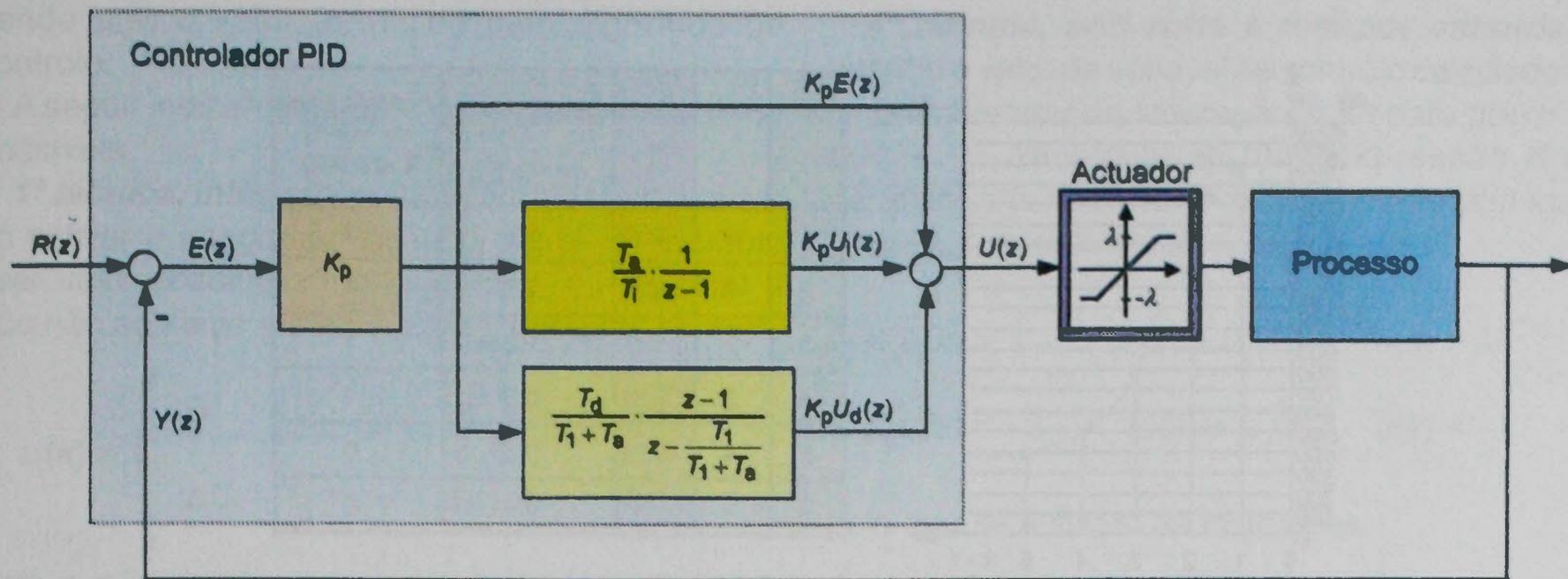


Fig. 1- Esquema de blocos do controlador PID com as componentes P, I e D separadas (com o controlador a excitar um actuador linear mas saturável).

Note-se que  $T_a \ll T_i$  equivale a ter  $T_i / (T_i + T_a) \approx 1$ , o que simplifica a expressão de  $u_d(k)$  com uma ligeira aproximação. Recorde-se ainda que se faz  $T_d$  proporcional a  $T_i$  (com  $N = T_i / T_d$ ).

É importante analisar o significado físico das expressões do algoritmo anterior, sobretudo as componentes integral e derivada.

### EFEITOS DA COMPONENTE INTEGRAL

A componente integral do controlador digital revela dois aspectos merecedores de atenção: um possível erro de integração e um provável excesso da variável de controlo sobre o actuador. Ambos os casos conduzem a refinamentos do algoritmo de controlo, tornando-o eventualmente mais eficaz.

Quanto ao **erro de integração**, observe-se que a integração digital executa-se através da equação recorrente

$$u_i(k) = u_i(k-1) + \frac{T_a}{T_i} e(k-1)$$

onde a segunda parcela do membro da direita se interpreta como uma modificação de  $u_i(k-1)$  para gerar  $u_i(k)$  no instante de amostragem seguinte. Com  $T_a \ll T_i$  esta parcela pode tornar-se inferior ao limiar de quantização das amplitudes das grandezas analógicas. De facto, quando for

$$\frac{T_a}{T_i} e(k-1) < 1$$

não se acrescenta nenhum valor (necessariamente inteiro) a  $u_i(k-1)$  e portanto anula-se a modificação desejada, mesmo que exista um erro de controlo  $e(k-1)$  diferente de zero. Basta que se verifique a relação  $T_i / T_a > e(k-1)$ .

Por exemplo, se for  $T_a = 1$  ms e  $T_i = 1$  s calcula-se  $T_i / T_a = 10^3$  e, por conseguinte, abaixo de  $e(k-1) = 1000$  permanecerá  $u_i(k) = u_i(k-1)$ , apesar de haver um certo erro de controlo  $e(k-1) < 1000$ . Numa representação digital com palavras de 16 bits definem-se  $2^{16} = 65\,536$  níveis de discretização, pelo que não exercem acção de controlo os erros de controlo reduzidos, numa gama à volta de 1,5 % do universo de discretização das amplitudes do erro de controlo analógico.

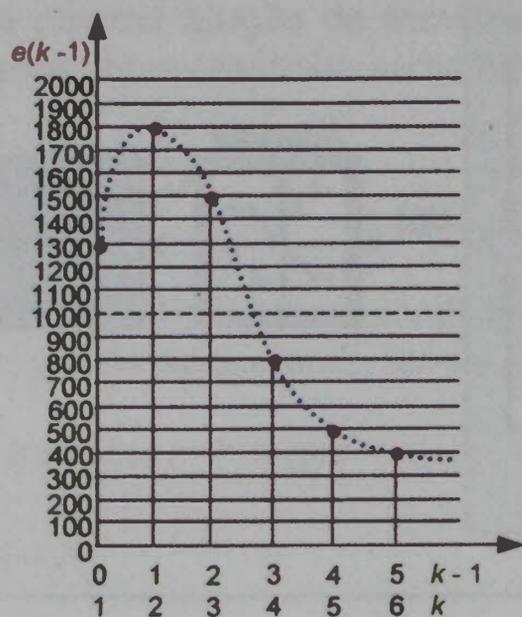
O problema resolve-se pelo aumento do comprimento das palavras binárias em todos os cálculos de integração, por exemplo, com 32 bits (em vez de 16 bits). Mas esta maior quantidade de níveis de discretização das amplitudes (visto ser  $2^{32} = 131\,072$ ) obriga a substituir os equipamentos existentes que operam a 16 bits, com evidentes repercussões económicas.

Por isso, tenta-se encontrar outra solução, no âmbito da programação algorítmica. A astúcia consiste em retirar a parte não usada do erro de controlo  $e(k-1)$  antes de avaliar a modificação a introduzir na refrescagem do algoritmo, memorizando-a e acrescentando-a ao erro de controlo no instante de amostragem seguinte (Fig. 2). Nesta perspectiva, em vez de multiplicar  $T_a / T_i$  por  $e(k-1)$ , multiplica-se o erro de controlo em memória pela soma  $w(k)$  de acumulação dos restos dos erros de integração. Assim, a instrução algorítmica que calcula  $u_i(k)$  será substituída pelas duas instruções

$$w(k) = w(k-1) + e(k-1)$$

$$u_i(k) = u_i(k-1) + \frac{T_a}{T_i} w(k)$$

fazendo a refrescagem pelo armazenamento de  $w(k)$  quando for  $e(k-1) < T_i / T_a$ .



k	k-1	e(k-1)	$\frac{T_a}{T_i} e(k-1)$ $= 10^{-3} e(k-1)$	Actualização de u(k-1) para u(k)
1	0	1300	1,3	1
2	1	1800	1,8	1
3	2	1500	1,5	1
4	3	800	0,8	1
5	4	500	0,5	0
6	5	400	0,4	0

a)

b)

k	k-1	e(k-1)	$w(k) = e(k-1) + w(k-1)$	$\frac{T_a}{T_i} w(k)$ $= 10^{-3} w(k)$	Actualização de u(k-1) para u(k)	Resto memorizado para k seguinte
1	0	1300	1300 + 0 = 1300	1,3	1	300
2	1	1800	1800 + 300 = 2100	2,1	2	100
3	2	1500	1500 + 100 = 1600	1,6	1	600
4	3	800	800 + 600 = 1400	1,4	1	400
5	4	500	500 + 400 = 900	0,9	0	900
6	5	400	400 + 900 = 1300	1,3	1	300

c)

Fig. 2- Exemplo numérico do efeito de erro de integração (com  $T_a/T_i = 10^{-3}$ ).

- a) Discretização da amplitude do erro de controlo: níveis quantizados a 16 bits.
- b) Algoritmo sem efeito de acumulação dos restos do erro de controlo e(k-1).
- c) Algoritmo com efeito de acumulação dos restos do erro de controlo e(k-1).

É claro, para evitar que se exceda a capacidade de processamento, convém usar palavras com maior extensão possível, tipicamente 32 bits ou 64 bits.

Outra questão inerente à integração digital consiste nas medidas de **anti-volta a reimpôr** (*antireset windup*). De facto, se o erro de controlo  $e(k) = r(k) - y(k)$  for um sinal elevado durante muito tempo, o termo integral  $K_p u_i(k)$  pode atingir valores altos e originar uma variável de controlo  $u(k)$  na saída do controlador que irá saturar o actuador a jusante. Assim, o crescimento continuado da integração faz com que  $u(k)$  não manifeste o desejado efeito de controlo, uma vez atingida a saturação no exterior do controlador.

Então, será conveniente "esvaziar" o conteúdo integrado durante algum tempo, saindo da zona saturada para voltar à zona linear da característica de operação do actuador. Isto executa-se matematicamente através da redução da amplitude do termo  $K_p u_i(k)$ , obrigando a trocar o sinal do erro de controlo  $e(k)$ , a fim de eliminar os excessos manifestados.

Este *efeito de volta a reimpôr* (*reset windup*) provoca oscilações, chegando a instabilizar o anel fechado. Trata-se de um comportamento não previsto na síntese do controlador (segundo a metodologia anteriormente descrita), por se dever a fenómenos de saturação externos. O seu tratamento quantitativo, por meio de abordagens não-lineares e difíceis simulações, revela-se bastante complexo. Por isso, tentam-se aproximações simplificadas, que atenuam ou eliminam o efeito de volta a reimpôr da componente de integração.

Para tornar simples os raciocínios, consideram-se as saturações a jusante do controlador globalmente modelizadas por uma característica ideal: a variável de controlo efectivo  $u_E(k)$ , que se fornece efectivamente ao actuador do processo controlado, tem variação linear simétrica entre os limites saturados  $\pm\lambda$  (Fig. 1):

$$u_E(k) = \begin{cases} \lambda & u(k) > \lambda \\ u(k), & -\lambda \leq u(k) \leq \lambda \\ -\lambda, & u(k) < -\lambda \end{cases}$$

sendo  $u(k)$  o valor fornecido pelo algoritmo de controle.

A seguir indicam-se quatro soluções, entre outras possíveis.

**1ª técnica, integração condicional:** consiste em só activar a integração quando o erro de controle tiver valor absoluto muito pequeno, de maneira a que não se atinja a saturação do actuador, ou seja,

$$u_i(k) = \begin{cases} 0 & , |e(k)| > \alpha \\ u_i(k-1) + \frac{T_a}{T_i} e(k-1) & , |e(k)| \leq \alpha \end{cases}$$

com o número positivo  $\alpha$  ajustado experimentalmente ou por simulação.

**2ª técnica, limitação de integração:** limitam-se os valores de  $K_p u_i(k)$  abaixo das saturações da variável de controle (Fig. 3)

$$u_i(k) = \begin{cases} \lambda_i & , u_i(k) > \lambda_i \\ -\lambda_i & , u_i(k) < -\lambda_i \end{cases}$$

com o número positivo  $\lambda_i$  tal que  $|K_p \lambda_i| \leq \lambda$ , se  $\lambda$  corresponder à saturação externa na aplicação da variável de controle.

**3ª técnica, bloqueio de integração:** elimina-se o comportamento integral se a variável de controle entrar na saturação do actuador, introduzindo a instrução

$$u_i(k) = u_i(k-1) \quad , \quad |u(k)| > \lambda$$

quando o valor  $u(k)$  calculado pelo algoritmo de controle verificar  $|u(k)| > \lambda$ , em vez de usar  $u_i(k) = u_i(k-1) + T_a e(k-1)/T_i$ . Neste caso, o valor limite imposto  $K_p u_i(k)$  resulta variável, ao contrário da técnica anterior, pois depende dos valores das outras componentes  $K_p e(k)$  e  $K_p u_d(k)$  que dão  $u(k) = K_p [e(k) + u_i(k) + u_d(k)]$ .

**4ª técnica, anti-volta a reimpôr estandarde:** quando o valor da variável de controle calculado pelo algoritmo entrar na saturação, quer para  $u(k) > \lambda$  ou  $u(k) < -\lambda$ , recalcula-se uma expressão  $K_p u_i(k)$  gerando uma nova variável de controle  $u(k)$  igual a  $\lambda$  ou  $-\lambda$ , respectivamente, sendo

$$K_p u_i(k) = \lambda - K_p [e(k) + u_d(k)] \quad , \quad u(k) > \lambda$$

$$K_p u_i(k) = -\lambda - K_p [e(k) + u_d(k)] \quad , \quad u(k) < -\lambda$$

peço que se activam as instruções

$$u_i(k) = \begin{cases} \frac{\lambda}{k_p} - e(k) - u_d(k) & , \quad u(k) > \lambda \\ -\frac{\lambda}{k_p} - e(k) - u_d(k) & , \quad u(k) < -\lambda \end{cases}$$

$$u_i(k) = K_p [e(k) + u_i(k) + u_d(k)] \quad , \quad -\lambda \leq u(k) \leq \lambda$$

As três primeiras técnicas anti-volta a reimpôr não garantem que resulte um sinal  $u(k)$  satisfazendo a condição  $|u(k)| \leq \lambda$ , isto é, não evitam sempre a saturação da acção de controle. São soluções atractivas porque a integração mantém, em larga medida, o seu significado físico. Por sua vez, a técnica estandarde não preserva esta natureza física de integração, podendo até diminuir o termo  $K_p u_i(k)$  quando o erro de controle aumenta, mas a desigualdade  $|u(k)| \leq \lambda$  nunca é violada. Daí a sua importância prática.

#### EFEITOS DA COMPONENTE DERIVADA

O termo da derivada no algoritmo do controlador PID também suscita duas análises particulares, em consequência de um possível erro de derivação e

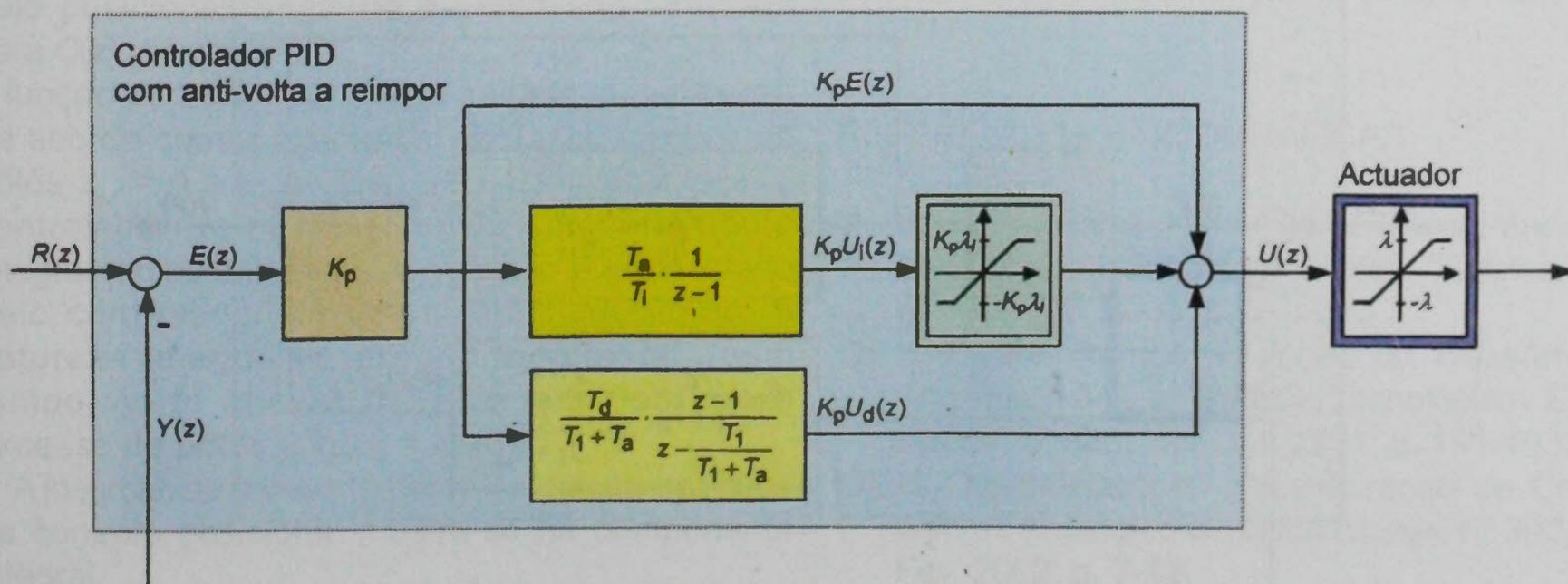


Fig. 3- Esquema de blocos do controlador PID com saturação a jusante da variável de controle: técnica anti-volta a reimpôr por limitação de integração.

um provável pico excessivo da variável de controlo sobre o actuador.

Relativamente ao **erro de derivação**, constata-se que os valores do erro de controlo em instantes sucessivos,  $e(k)$  e  $e(k - 1)$ , podem ser muito pouco diferentes, sobretudo se o período de amostragem  $T_a$  for bastante pequeno. Nestas condições, a diferença  $e(k) - e(k - 1)$  pode resultar insignificante, anulando a actualização algorítmica de  $u_d(k - 1)$  para gerar  $u_d(k)$ . Este efeito do erro de derivação no cálculo da variável de controlo  $u(k)$  impõe, necessariamente, um limite máximo à frequência de amostragem, de maneira a evitar a perda de controlo pela componente derivada.

Além disso, a natureza estrutural da componente derivada pode originar um **excesso da variável de controlo**  $u(k)$ , quando ocorrem variações bruscas do erro de controlo. É o caso da aplicação de um degrau na estrutura do sistema de controlo. Uma solução deste problema consiste em ramificar a retroacção  $y(k)$ , no lugar de  $e(k) = r(k) - y(k)$ , para a entrada da componente derivada (Fig. 4). Então vem

$$U_d(z) = \frac{T_d}{T_1 + T_a} \cdot \frac{z - 1}{z - \frac{T_1}{T_1 + T_a}} Y(z)$$

e, por conseguinte, usa-se a instrução relativa a

$$u_d(k) = \frac{T_d}{T_1 + T_a} \left\{ u_d(k - 1) + \frac{T_d}{T_1} [y(k) - y(k - 1)] \right\}$$

para refrescar a variável de saída, discretizada a partir dos respectivos valores armazenados em memória, sem intervenção do brusco sinal de referência. É claro que não se evitam os inconvenientes de variações bruscas da saída do processo, a qual é usada retroactivamente.

CONTROLADOR PID SOB FORMA INCREMENTAL

Às vezes, na prática, convém usar a função de transferência discreta sob forma incremental, também dita forma de velocidade, definida pelo incremento  $\Delta u(k)$  referente à actualização da variável de controlo, tal que  $u(k) = u(k - 1) + \Delta u(k)$ . Assim, em vez de se considerar a própria variável  $u(k)$  da forma normal de posição, utiliza-se

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k - 1)$$

cuja transformação em  $z$  é  $\Delta U(z) = (1 - z^{-1})U(z)$  e com a função de transferência posicional  $C(z) = U(z)/E(z)$  obtém-se  $\Delta U(z) = (1 - z^{-1}) C(z)E(z)$ . Se se definir a função de transferência incremental pela relação  $C_\Delta(z) = \Delta U(z)/E(z)$ , conclui-se a expressão (Fig. 5)

$$C_\Delta(z) = K_p \left[ \frac{z-1}{z} + \frac{T_a}{T_1 z} + \frac{T_d}{T_1 + T_a} \cdot \frac{(z-1)^2}{z \left( z - \frac{T_1}{T_1 + T_a} \right)} \right]$$

e um raciocínio análogo ao feito no controlador PID posicional permite calcular a equação às diferenças que fornece o incremento  $\Delta u(k)$  a adicionar a  $u(k - 1)$  para obter  $u(k)$ . Esta actualização não é mais do que um efeito integral. Tal integração realiza-se, frequentemente, fora do computador de controlo, como acontece no accionamento por intermédio de um motor eléctrico que introduz os referidos incrementos integradores. Exemplifica o controlo de uma máquina-ferramenta ou do braço articulado de um robô.

Note-se que o termo integral do controlador PID incremental não pode ser eliminado, pelo que esta configuração só deixa realizar os controladores PI e PID.

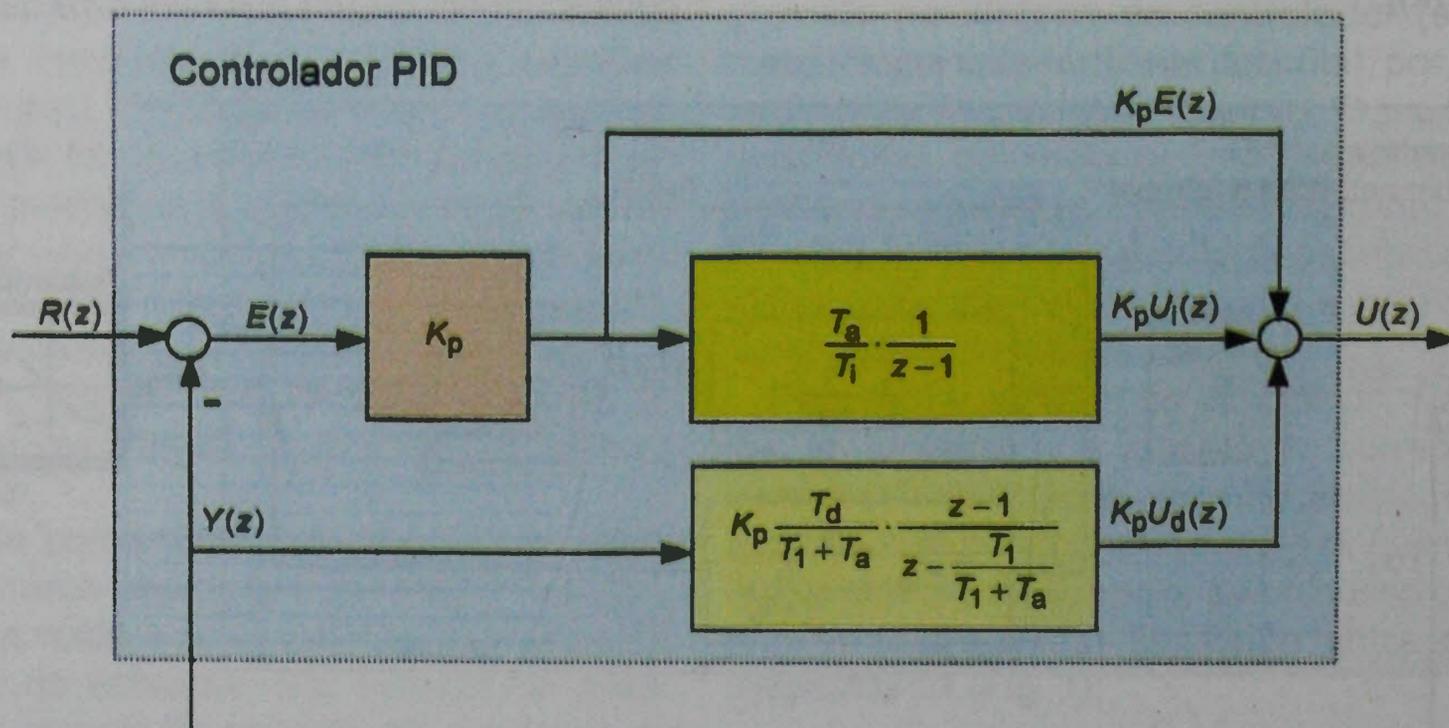


Fig. 4- Esquema de blocos do controlador PID com conexão modificada da componente derivada a fim de evitar efeitos excessivos de variação brusca da referência.

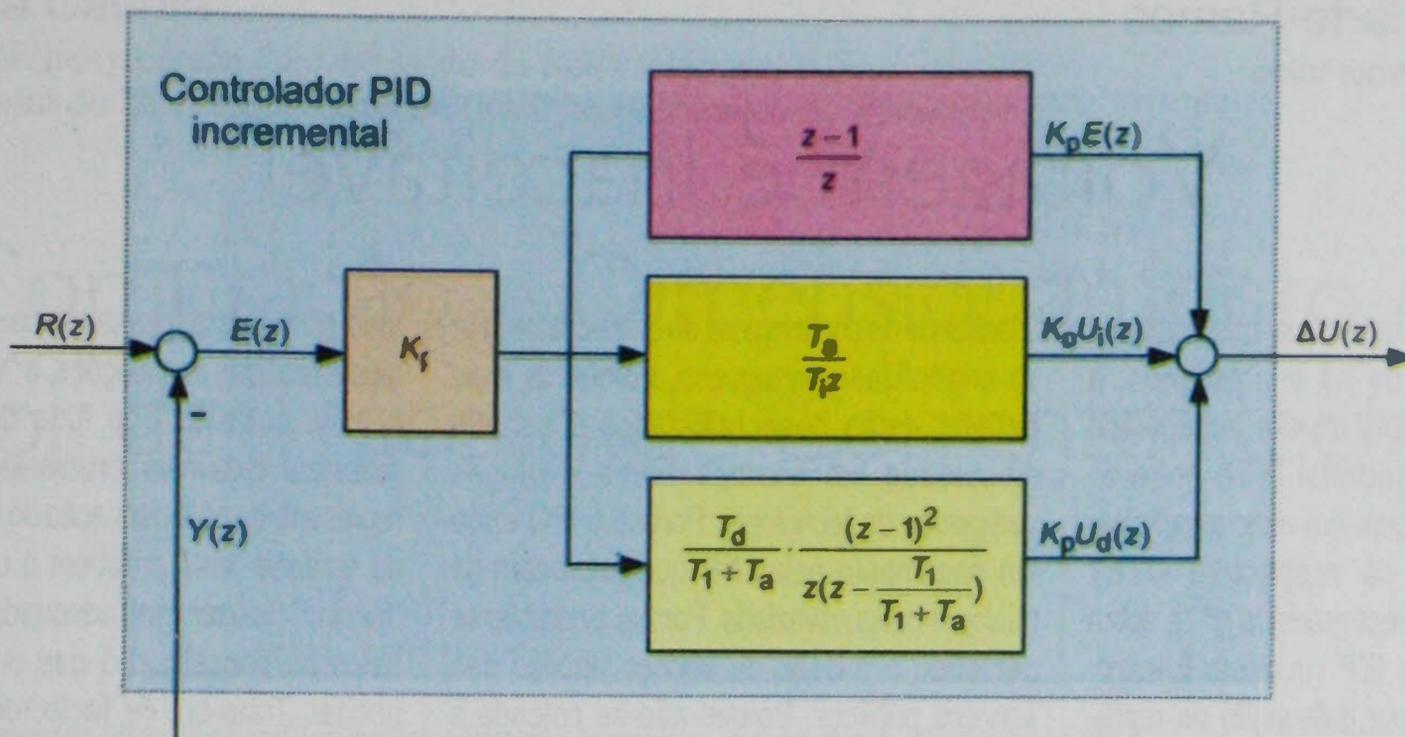


Fig. 5 - Esquema de blocos do controlador PID incremental.

Repare-se ainda que num controlador sob forma incremental a integração realiza-se externamente, e, portanto, não existe efeito de volta a reimpôr. De facto, logo que aparece a saturação os incrementos  $\Delta u(k)$  deixam de ser considerados, porque a integração  $u(k) = u(k - 1) + \Delta u(k)$  não se efectua para além da saturação. Este desempenho justifica a preferência generalizada pela estrutura de controlo sob a forma de velocidade em vez de posição.

### COMPARAÇÃO DOS MODELOS POSICIONAL E INCREMENTAL

A diferença de comportamento dos dois modelos de controlador PID, um referente à posição e outro à velocidade do movimento do actuador, aprecia-se de duas maneiras distintas: pela interpretação dos pólos e através do significado da componente integral do algoritmo de controlo.

Realmente, os pólos das duas configurações são diferentes: a função de transferência do modelo posicional, segundo a expressão deduzida para  $C(z)$ , dá os pólos  $z_{p1} = 1$  e  $z_{p2} = T_1 / (T_1 + T_a) < 1$ ; e a função de transferência do modelo incremental, de acordo com a expressão de  $C_{\Delta}(z)$ , fornece os pólos  $z_{p1} = 0$  e  $z_{p2} = T_1 / (T_1 + T_a) < 1$ . Por isso, o controlador de posição revela comportamento integral (no pólo unitário), o qual não é evidenciado pelo controlador de velocidade, que insere a natureza integral no próprio incremento (sem tempo-morto apesar do pólo nulo, porque o excesso de pólos é igual a zero).

A inserção do comportamento integral no algoritmo de controlo posicional mostra-se na componente integral

$$U_i(z) = \frac{T_a}{T_i} \cdot \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} E(z)$$

que estabelece

$$u_i(k) = u_i(k + 1) + \frac{T_a}{T_i} e(k - 1)$$

enquanto no modelo incremental a componente integral é

$$U_i(z) = \frac{T_a}{T_i} z^{-1} E(z)$$

dando

$$u_i(k) = \frac{T_a}{T_i} e(k - 1)$$

o que permite afirmar: no controlador posicional a componente integral  $u_i(k)$  corresponde à actualização do seu valor  $u_i(k - 1)$  pelo erro de controlo; mas no controlador incremental a componente integral  $u_i(k)$  refere-se apenas à intervenção desse erro de controlo, pois agora  $u_i(k)$  já é uma integração, correspondente à anterior diferença  $u_i(k) - u_i(k - 1) = \Delta u_i(k)$ .

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] H. Duarte-Ramos, «Função de Transferência Discreta de um Controlador Digital», *Electricidade*, nº 383, Dez. 2000, p. 313-318.
- [2] H. Duarte-Ramos, «Função de Transferência Amostrada de um Processo Tecnológico» *Electricidade*, nº 390, Set-Out. 2001, p. 191-193.
- [3] H. Duarte-Ramos, «Discretização de Controladores Analógicos», *Electricidade*, nº 392, Jan-Fev. 2002, p. 7-12.